现代应用数学丛书

# 偏微分方程

〔日〕南云道夫 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

# 偏微分方程

〔日〕南云道夫 著
錢端壮 譯
林坚冰 校

上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分七章，第一章介紹解析方程的一般理論，第二章介紹一阶拟綫性方程，第三章为一般的一阶方程，四、五两章叙述二阶方程，六、七两章分別討論椭圓型和双曲型方程。本书可供各高等学校作为教学参考书，也可供工程师、科学研究工作者作参考。

現代应用数学丛书

# 偏 微 分 方 程

原书名　偏微分方程式
原著者　(日) 南云道夫
原出版者　岩 波 书 店
譯　者　錢 端 壮
校　者　[illegible] 铿 冰

上海科[illegible]技术[illegible]版[illegible]出版
(上海[illegible]二路[illegible]号)
[illegible]书刊出版业营业许可証出[illegible]号
新华书店[illegible]海发行所发行　各地新华书店經售
[illegible]上海市印[illegible]刷

开本 850×1168 1/32　印张 6 12/32　字数 150,000
1961年11月新1版　1961年11月第1次印刷
印数 1—17,000

統一书号：13119·425
定　　价：(十四) 1.10元

# 出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠挚的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

# 記 号 説 明

現在就本书，特别就第 1～3 章中所用的記号加以說明。

偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$，恒用記号 $\partial_x$，$\partial^2_{xy}$ 代替。

如只要区别独立变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的番号，則 $\partial_{x_\nu}$ 有时簡写成 $\partial_\nu$。

$E^n$ 表示 $n$ 維 Euclid 空間［$n$ 个实数組 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的全变域］。$x^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 表示 $E^n$ 中的一点［即 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 的某一特殊值］。

$$m\times n \text{ 矩陣 } \begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i1}\cdots a_{ij}\cdots a_{in} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ 簡記为 } \left(a_{ij} \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,n}\right).$$

$\delta_{ij}$ 表示 Kronecker 記号，即当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。

对于一組等式，譬如 $x=a(s)$，$y=b(s)$，$z=c(s)$，恒用写法 $(x, y, z)=\{a, b, c\}(s)$。

Rk（矩陣）代表矩陣的秩数。

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}=\left|\partial_\nu f_\mu(x) \quad {}^{\mu\downarrow 1,\cdots,n}_{\nu\to 1,\cdots,n}\right| \quad \text{（函数行列式）},$$

$$\int f(x)\,d^n x=\int f(x_1, \cdots, x_n)\,dx_1\cdots dx_n.$$

另外，对于偏微分的記号有时也用普通的写法，如 $f_x$，$f_{xy}$ 等。

在第 1～3 章中，將討論解析的偏微分方程的一般理論，以及主要对于单独的一阶偏微分方程，讲述一些古典的求解理論。

# 目　录

# 第1章 解析的偏微分方程的一般理論

本章主要是在微分方程具有解析而正則的函数表达形式的假設下进行討論的。这样，为了得到与方程的类型无关而一般正确的理論，我們也只限于討論解析的微分方程具有解析而正則解的情形。但是这里所說的类型，并不象綫性或是非綫性的方程，可以由方程的外表形式来区别(它是由于特征方程的根是虚，或是实的而产生的)，一般解的本質的性質(解析性)，由于所屬方程的类型不同，有着相异的特性(这一点以后自然会明了)。現在本章中所討論的函数假定它們都是解析而正則的。一般，在公式的形式变換中，必須根据变換中所出現的微分計算的阶数，来假設函数連續可微的次数，但是現在有了正則性的保証，函数就有任意次連續微分的可能，所以沒有必要每次再重复提出討論。

## §1 偏微分方程中有关的定义

一般关于独立变数、未知函数及它的偏导数由确定的函数关系結合而成的方程叫做偏微分方程。恒等地滿足这个方程的函数(未知)叫做方程的解。譬如，象

(a) $yu_x - xu_y = 0$, (b) $u_{xy} = 0$,

(c) $u^2(1 + u_x^2 + u_y^2) = 1$

就都是偏微分方程，其中 $x$, $y$ 是独立变数，$u$ 是未知函数。这些方程分别以

$$u = \phi(x^2 + y^2), \qquad u = \phi(x) + \psi(y),$$

$$u = \{1 - (x-a)^2 - (y-b)^2\}^{1/2}$$

作为它們的解。这里 $\phi$, $\psi$ 是任意的函数(可微的)，而 $a$, $b$ 是任

意的常数。有許多作者把偏微分方程的解称为方程的积分，我們在本书中将避免使用这种叫法。

另外，我們也研究一些与多个未知函数有关的联立偏微分方程組，譬如，象

(d) $u_x=v_y,\ \ v_x=-u_y$ ($u$, $v$ 未知函数)，

(e) $\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(x,y)\,\partial_x u_j+\sum_{j=1}^{k} b_{ij}(x,y)\,\partial_y u_j=\sum_{j=1}^{k} u_j^2 \quad (i=1,\cdots,k)$

($a_{ij}$, $b_{ij}$ 是已知函数，$u_1\cdots$, $u_k$ 是未知函数)，

(f) $uu_{xx}=v_y^2,\ vv_{yy}=u_x^2$ ($u$, $v$ 未知函数)。

所謂偏微分方程的**阶数**[1]，就是方程中出現的未知函数的导函数中最大的阶数。在上面的例子中，(a)，(c)，(d)，(e)都是一阶的偏微分方程，(b)，(f)是二阶的偏微分方程。

如果偏微分方程对于未知函数以及它的各阶导函数都是一次齐式，这个方程就叫做**綫性方程**。(a)，(b)，(d)三个方程都是綫性方程。如果方程是未知函数最高阶导函数的一次齐式，这个方程就叫做**拟綫性方程**，(e)和(f)就是拟綫性方程。方程(c)既不是綫性的，也不是拟綫性的，这种方程叫做**非綫性方程**。一般也把一切不是綫性的方程(包括拟綫性的在内)都叫做非綫性方程。在拟綫性方程中最高阶导函数所組成一次齐次式的那一部分，叫做方程的主部。在方程(e)和(f)中，等号的左边部分是方程的主部。若是拟綫性方程的主部内的系数，都是常数或是独立变数的已知函数，这种方程就叫做**半綫性方程**。(e)是半綫性方程，但(*f*)不是半綫性方程。对于偏微分方程，除了一阶的偏微分方程(单独方程)以外，研究得比較透彻的主要是綫性方程。

我們可以把常微分方程看成是仅具一个独立变数以及一个未

---

[1] 原著者为了避免与行列式的 rank 一字的譯文混淆，把偏微分方程的阶数(order)改譯成位数，現在我們仍用阶数作为 order 的譯文，并把 rank 譯成秩数。——譯者注

知函数的偏微分方程。相反，如果在偏微分方程中仅仅出現未知函数(它是多个独立变数的函数)对于某一个独立变数的偏导函数的时候，那么对这一个独立变数来説，就可以把偏微分方程看成是常微分方程(其他的独立变数可以認为是未知函数中的任意参数)。

## §2 解析的偏微分方程的初始值問題

**1. 初始值問題** 一般关于解析偏微分方程的理論中，最基本的就是 Cauchy 的初始值問題的解的存在定理。所以普通就把初始值問題称为 **Cauchy 問題**。

首先我們用一个簡单的例子，对初始值問題作一个淺近的解釋。

考虑下面的一阶綫性偏微分方程

$$u_x - u_y = 0. \tag{2.1}$$

这个方程的解都具有 $u=\phi(x+y)$ 的形状，其中 $\phi$ 是任意的函数(这一点可以利用变换 $x+y=\xi$, $x-y=\eta$, 把独立变数变成 $\xi$ 与 $\eta$ 而导出)。对于这个解，如果說 $x=0$ 时，$u=\phi(y)$，則(2.1)的解就由解的初始条件

$$x=0 \text{ 时} \quad u=\phi(y) \quad (\phi \text{ 是任意給定的函数})$$

所唯一决定。

其次，再討論一个二阶綫性偏微分方程

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{2.2}$$

令 $x=(\xi+\eta)/2$, $y=(\xi-\eta)/2$, 把独立变数 $x$, $y$ 变成 $\xi$, $\eta$, 容易証明方程变成了

$$u_{\xi\eta}=0.$$

于是

$$u=\phi(\xi)+\psi(\eta) \quad (\phi, \psi \text{ 是任意函数}).$$

因此(2.2)的解必定是

$$u=\phi(x+y)+\psi(x-y). \tag{2.3}$$

在这里如令 $x=0$，則

$$u(0,\ y)=\phi(y)+\psi(-y),\quad u_x(0,\ y)=\phi'(y)+\psi'(-y).$$

若現在初始条件是

$$x=0\ \text{时},\quad u=f(y),\quad u_x=g(y), \tag{2.4}$$

則

$$\phi(y)+\psi(-y)=f(y),\ \phi'(y)+\psi'(-y)=g(y),$$

因此有

$$\phi(y)=\frac{1}{2}\left\{f(y)+\int_0^y g(y)dy\right\},$$

$$\psi(-y)=\frac{1}{2}\left\{f(y)-\int_0^y g(y)dy\right\}.$$

于是根据(2.3)就得到

$$u=\frac{1}{2}\left\{f(x+y)+f(y-x)+\int_{y-x}^{x+y} g(t)dt\right\}. \tag{2.5}$$

相反，若 $f$, $g$ 是任意函数，可以証明 (2.5) 必是方程 (2.2) 的解。所以(2.2)的解由初始条件(2.4)所唯一決定。（$f$, $g$ 可看成是任意的已給函数。）

上面的例題指出，一般单独一个偏微分方程的解中包含着任意函数，任意函数的个数就是方程的阶数(任意函数中的独立变数比方程中的独立变数少一个)。有理由来推測，解中的任意函数将由初始条件所唯一地决定。(实际上，一般解中的任意函数或者是初始条件中任意給定的函数，或者是它的变形函数。)

一般的偏微分方程含有多个独立变数。如果对其中某一个独立变数的一个特定值(上面的例中是 $x=0$)来討論初始条件，象这样的变数，为了在考虑初始条件时与其他的独立变数有所区别，我們叫它作时間的变数。相对地叫其他的独立变数为空間的变数。上面的例題中 $x$ 是时間的变数，$y$ 是空間的变数。但是在研究一般偏微分方程的时候，有时并不区别其中那一个变数是时間变数，

那一些是空間变数，而无区别地把独立变数的全体看成一个空間，并在空間中考慮一个超曲面（如独立变数的个数是2，即二維空間，則此超曲面化为曲綫，如独立变数的空間是三維空間，則超曲面为曲面）。我們規定所求的未知函数以及它的导函数要在这个超曲面上取已給的値。要决定这样的解的問題叫做"一般的 Cauchy 問題"。我們将在后面一节討論这种一般的 Cauchy 問題。

假設偏微分方程的未知函数的最高阶导函数中，出現着仅与时間变数有关的偏导函数。当这个偏导函数能够解出，而用含有独立变数、未知函数以及其他的偏导函数的形式来表达的时候，这种解出了的方程叫做对时間变数的**基准型**。譬如对于二阶的拟綫性方程

$$(1+u_x^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_y^2)u_{yy}=0,$$

如果 $x$ 是时間变数，則

$$u_{xx}=(1+u_x^2)^{-1}\{2u_xu_yu_{xy}-(1+u_y^2)u_{yy}\}$$

是基准型的方程。

**2. Cauchy-Kowalewski 定理** 为了方便起見，令 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x$. $f(x)$ 叫做在 $x=x^0$ 处变数 $x$（$n$ 个独立变数）的解析正則函数，如果在 $x=x^0$ 的邻域，譬如当 $|x_\nu-x_\nu^0|<\rho_\nu$ $(\nu=1, \cdots, n)$，$f$ 可以展开成为 $x_1-x_1^0, x_2-x_2^0, \cdots, x_n-x_n^0$ 的 $n$ 重冪級数（并且广义絕对一致收斂），即 $f(x)=\sum a_{\nu_1\cdots\nu_n}(x_1-x_1^0)^{\nu_1}\cdots(x_n-x_n^0)^{\nu_n}$. 这时，若 $x$ 表示 $n$ 个复变数，則当 $|x_\nu-x_\nu^0|<\rho_\nu$ 时，这个冪級数也广义絕对一致收斂。于是对于原始是 $n$ 个实变数的函数 $f(x)$，自然可以唯一的延拓成为 $n$ 个复变数的正則函数（当独立变数是复变数时，我們就把解析正則的函数簡单地叫做正則函数）。所以本节以后所考慮的函数都是复变数的正則函数。

設 $x$ 是时間变数，$y=(y_1, \cdots, y_m)$ 是空間变数，$u=(u_1, u_2, \cdots, u_l)$ 是 $(x, y)$ 的未知函数，我們討論一下一阶的联立基准型偏

微分方程組

$$\partial_x u_i = f_i(x, y, u, \partial_y u) \quad (i=1, \cdots, l). \tag{2.6}$$

为了方便起見，引入記法 $\partial_{y_\nu} u_i = p_{i\nu}$，并把这 $lm$ 个 $p_{i\nu}$ 簡記作 $p$。这样，$f_i$ 是 $1+m+l+lm$ 个独立变数 $(x, y, u, p)$ 的解析正則函数。現在 Cauchy-Kowalewski 定理断言：設 $\phi_i(y)$ 是任意的已給正則函数，則方程組 (2.6) 存在着唯一的一組滿足初始条件 "$x=x^0$, $u_i=\phi_i(y)$" 的解 $u_i=u_i(x, y)$。确切的述說如下：

**定理 2.1** (假設) $f_i$ 在 $(x, y, u, p)=(x^0, y^0, u^0, p^0)$ 处是 $(x, y, u, p)$ 的正則函数，$\phi_i$ 在 $y=y^0$ 处是 $y$ 的正則函数，并且

$$\phi_i(y^0)=u_i^0, \ \partial_\nu \phi_i(y^0)=p_{i\nu}^0.$$

(結論) 則存在着在 $(x, y)=(x^0, y^0)$ 处的正則函数組 $u_i=u_i(x, y)$ $(i=1, 2, \cdots, l)$，它們滿足联立方程組 (2.6) 以及初始条件 $u_i(x^0, y)=\phi_i(y)$，这种正則函数組并且是唯一的。

Cauchy-Kowalewski 定理的証明方法，是把解 $u_i$ 对于 $x-x^0$，$y_\nu-y_\nu^0$ $(\nu=1, \cdots, m)$ 展开成为整冪級数，冪級数的系数，由于 $u_i$ 要滿足 (2.6) 的緣故，可以由最低項次的系数順次地决定。其次再把这样得到的冪級数与一个优級数来比較而証明它的收斂性。由于本书的篇幅关系我們省略了定理的証明。关于綫性情形的証明可以参看 Petrovski: Lectures on partial differential equations❶, pp. 18~26. 一般情形的証明(把方程化成拟綫性方程的方法)見 Courant u. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik II, pp. 35~44.

現在我們来証明联立高阶(但为基准型的)微分方程組的 Cauchy-Kowalewski 定理。証明的方法就是把这个問題化成联立一阶 (2.6) 方程組的問題。

首先为了使問題簡单一些，我們考虑单独一个具有两个独立

❶ 有中譯本，彼德罗夫斯基：偏微分方程讲义，高等教育出版社。——譯者注

变数的二阶偏微分方程：

$$\partial_x^2 u = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}). \tag{2.7}$$

并設初始条件是“$x=x^0$ 时，$u=\phi(y)$，$u_x=\psi(y)$”。令 $u_x=p, u_y=q$，容易証明，上面的方程就化成为下面关于未知函数 $(u, p, q)$ 的联立一阶方程組：

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_x u = p, & \partial_x q = \partial_y p, \\ \partial_x p = f(x, y, u, p, q, \partial_y p, \partial_y q), & \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

初始条件是：$x=x^0$ 时，$u=\phi(y)$，$p=\psi(y)$，$q=\phi'(y)$。这組方程根据定理 2.1 具有正則的解（$f$, $\phi$, $\psi$ 在适当的范圍中是正則的）。設这組解是 $(u, p, q)=\{u, p, q\}(x, y)$，現在来証明 $u=u(x, y)$ 是(2.7)的解。首先由 (2.8) 中的第一式有 $p=u_x$，所以由第二式有 $\partial_x(q-u_y)=\partial_x q-\partial_y p=0$，又因为当 $x=x^0$ 时，$q-\partial_y u=\phi'(y)-\phi'(y)=0$，故此 $q=u_y$。最后第三式就化成为(2.7)。至于初始条件很明显是一样的。

下面再討論一般的单独一个高阶方程（基准型）

$$\partial_x^p u = F(x, y, u, u_x, u_y, \cdots, \partial_x^{p-1} u_y, \cdots) \tag{2.9}$$

（$F$ 中含有对 $u$ 的最高到 $p$ 阶的导函数，并且对变数 $x$ 的导函数最高到 $p-1$ 阶）。設初始条件是“$x=x^0$ 时，$u=\phi(y)$，$\partial_x^i u=\phi_i(y)$”。为了书写方便，我們引入記法 $\partial_x \equiv \partial_0$，$\partial_{y_\nu} \equiv \partial_\nu$ $(\nu=1, 2, \cdots, m)$，并令

$$\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_i} u = u_{\nu_1 \cdots \nu_i},$$

其中 $0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \leqslant \nu_i \leqslant m$ $(i=1, 2, \cdots, p-1)$，于是对于这些 $\nu_1, \cdots, \nu_i$，上面的方程 (2.9) 就化成为下面的联立一阶基准型的方程組：

$$\left.\begin{array}{l} \partial_x u = u_0, \quad \partial_x u_{\nu_1 \cdots \nu_{i-1}} = u_{0\nu_1 \cdots \nu_{i-1}}, \\ \partial_x u_{\nu_1 \cdots \nu_{i-1} \nu_i} = \partial_{\nu_i} u_{0\nu_1 \cdots \nu_{i-1}} \quad (\nu_i \geqslant 1), \\ \partial_x u_{0 \times (p-1)} = F(x, y, u, \cdots, u_{\nu_1 \cdots \nu_i}, \cdots, \partial_{\nu_p} u_{\nu_1 \cdots \nu_{p-1}}) \quad (\nu_p \geqslant 1) \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

(这里的$0\times(i)$意味着 $i$ 个 0)。现在的初始条件是

$$x=x^0\text{ 时}, u=\phi(y),\quad u_{0\times(i)}=\phi_i(y),$$

$$u_{0\times(\varkappa)\nu_1\cdots\nu_i}=\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_i}\phi_\varkappa(y)\quad(\nu_1\geqslant 1,\ \varkappa+i<p-1).$$

显然，(2.9)与(2.10)分别在上面所給的初始条件下是等价的。

完全同样地可以把联立高价偏微分方程組(基准型)的初始值問題归結为联立一阶偏微分方程組的初始值問題。

**注意 1** 上面我們把高阶的偏微分方程轉化成联立一阶偏微分方程組。在常微分方程中，用这种方法必定可以把高阶的方程化成和它等价的联立一阶方程。但是在偏微分方程中如果連同初始条件一起考虑，高阶方程所化成的等价的联立一阶方程組的意义有所不同。因为轉化后联立一阶方程組的未知函数的个数，比原高阶方程的阶数为多。

**注意 2** 根据定理 2.1，解析而正則的基准型方程在初始値也是解析正則函数的时候存在着正則的解。但是如果初始函数不是解析正則的話 (即使无限次連續可微)，那么就不一定存在着方程的解。譬如考虑一下 Cauchy-Riemann 方程 ($x, y, u, v$ 都是实变数)：

$$u_x=v_y,\quad v_x=-u_y,$$

初始条件是 $x=0$ 时，$u=\phi(y)$，$v=0$。$u, v$ 当 $x\geqslant 0$，$|y|<\rho$ 时連續，并当 $x>0$，$|y|<\rho$ 时有全微分。于是 $u+iv=f(z)$　($z=x+iy$)，当 $x>0$，$|y|<\rho$ 时是复变数 $z$ 的正則函数，并且当 $x\geqslant 0$，$|y|<\rho$ 时連續。由于当 $x=0$ 时 $f$ 的虚数部分$=0$，所以根据映象原理，$f(z)$ 应該对于 $x=0$ 是对称的，而可以越过 $x=0$，直到 $x<0$，$|y|<\rho$ 解析延拓。[当 $x<0$ 时，$f(x+iy)=u(-x,y)-iv(-x,y)$。]故 $f(iy)=u(0,y)=\phi(y)$对于$|y|<\rho$ 应該是解析正則的。于是如果 $\phi(y)$ 不是解析而且正則的話，那么滿足 $x=0$ 时，$u=\phi(y)$，$v=0$ 的解便不存在。

**注意 3** 若(2.6)是綫性方程

$$\partial_x u_i=\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m}a_{ij\mu}(x,y)\partial_\mu u_j+\sum_{j=1}^{l}b_{ij}(x,y)u_j+c_i(x,y),$$

其中 $x, y$ 是复变数，并且当 $|x-x^0|<\rho$，$|y_\nu-y_\nu^0|<\rho$ 时，$a_{ij\mu}$，$b_{ij}$，$c_i$ 以及 $\phi_i(y)$都是正則函数，而且

$$|a_{ij\mu}|\leqslant A,\quad |b_{ij}|\leqslant B,$$

則滿足初始条件“$x=x^0$ 时，$u_i=\phi_i(y)$”的解 $u_i$，当 $|x-x^0|<\sigma$，$|y_\nu-y_\nu^0|<\sigma$

(其中 $\sigma=\sigma(\rho, A, B, m, l)$ 即仅与括弧中的量有关) 时是正则的。(这段証明可以参看前面举出的 Petrovski 的书。) 这个注意将在 Holmgren 定理的証明中用到。

**习題** 証明联立偏微分方程組($x, y, u, v$ 是实变数)

$$u_x=v_y, \quad v_x=-u_y+f(y)$$

存在着滿足初始条件：当 $x=0$, $|y|<\rho$ 时，$u=0$, $v=0$ 的解的充要条件是 $f(y)$ 当 $|y|<\rho$ 时为解析正則函数(参照注意 2)。

## §3 特征面(一般 Cauchy 問題)

**1. 联立一阶半綫性方程組的情形** 前一节中我們就基准型的方程討論了初始値問題。現在为了平等地处理所有的独立变数，把它們的全部記作 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，并考虑对未知函数 $u=\{u_1, \cdots, u_l\}(x)$ 的联立一阶方程組

$$f_i(x, u, \partial_x u)=0 \quad (i=1, \cdots, l)$$

$[\partial_x u=(\partial_\nu u_i\ i=1, \cdots, l;\ \nu=1, \cdots, n)]$. 特别为了容易理解起見，可以假設这个方程組是半綫性的，卽討論下面形式的方程組：

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{n} a_{ij\nu}(x)\partial_\nu u_j+b_i(x, u)=0 \quad (i=1, \cdots, l). \tag{3.1}$$

設在空間 $E^n$ 中給定一个曲面 $S$($n-1$ 維), $S$ 的方程是 $\phi(x)=0$, 并設 $u$ 在 $S$ 上取已給的値 $u=\psi(x)$. 在这种条件下求 (3.1) 的解的問題叫做一般 Cauchy 問題。要討論这个問題，可以适当地变换独立变数，譬如令 $\phi_1(x)=\phi(x)$，并且另外适当地取 $n-1$ 个函数 $\phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$，使得 $D(\phi_1, \cdots, \phi_n)/D(x_1, \cdots, x_n)\neq 0$. 于是令

$$x'_\nu=\phi_\nu(x) \quad (\nu=1, \cdots, n), \tag{3.2}$$

而把独立变数 $x$ 变换成为独立变数 $x'$ (在适当的范圍內)，并把 $\partial/\partial x'_\nu$ 記作 $\partial'_\nu$. 由于

$$\partial_\mu u=\sum_{\nu=1}^{n}\partial'_\nu u\cdot\partial_\mu\phi_\nu,$$

(3.1)式化成

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{n}\tilde{a}_{ij\nu}(x')\partial'_\nu u_j+\tilde{b}_i(x',u)=0\quad(i=1,\cdots,l),\\ \text{其中}\qquad &\tilde{a}_{ij\nu}=\left(\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}\cdot\partial_\mu\phi_\nu\right)_{x=\phi^{-1}(x')}.\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

由于在这里 $S$ 的方程成为 $x'_1=\phi(x)=0$，所以可以把 $x'_1$ 看成是时間的变数而得到某准型的方程。但是这里的条件是 $\partial'_1 u$ 的系数 $\tilde{a}_{ij1}$ 所組成的行列式 $\neq 0$，即（此处 $\phi_1=\phi$）

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}\partial_\mu\phi\quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,l}_{j\rightarrow 1,\cdots,l}\right|\neq 0,\tag{3.4}$$

这条件是充分而必要的。

因此，我們把关于 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的 $l$ 次齐次方程

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}(x^0)\,\xi_\mu\quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,l}_{j\rightarrow 1,\cdots,l}\right|=0\tag{3.5}$$

叫做(3.1)在 $x=x^0$ 处的**特征方程**。对于一般的曲面 $S:\phi(x)=0$，若是对它上面的点 $x^0$，$\xi_\nu=\partial_\nu\phi(x^0)$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 滿足特征方程(3.5)的話，那么我們就說 $S$ 在 $x^0$ 处是**特征**。(3.4)意味着 $S$ 不是特征。所以如果 $S$ 不是特征的話，則在 $S$ 上滿足 $u_i=\psi_i(x)$（$\psi_i$ 是已給的正則函数）的方程組(3.1)的解 $u_i(x)$ 存在而且唯一。用确切的語言来表达，就得到了下面的定理。

**定理 3.1**　若是当 $x=x^0$ 时，$a_{ij\mu}(x)$，$\phi(x)$，$\psi_i(x)$ 正則，当 $(x,u)=(x^0,u^0)$ 时，$b_i(x,u)$ 正則，并且 $\phi(x^0)=0$，$\psi_i(x^0)=u_i^0$。此外 $\phi(x)=0$ 在 $x^0$ 处不是特征，那么方程組(3.1)就存在着唯一的解 $u_i=u_i(x)$，这个解在 $x=x^0$ 处正則，并且当 $\phi(x)=0$ 时，$u_i=\psi_i(x)$。

如果 $S$ 上所有的点都是特征的話，即

$$\text{当}\ \phi(x)=0\ \text{时，}\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{ij\mu}\partial_\mu\phi\quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,l}_{j\rightarrow 1,\cdots,l}\right|=0\tag{3.6}$$

的时候，那么 $S:\phi(x)=0$ 就叫做(3.1)的**特征面**。

如果 $S$ 是特征面的話，利用(3.2)引入新的独立变数 $x'$，在

(3.3)中关于 $\partial_1^l u$ 系数的行列式滿足

$$\left|\tilde{a}_{ij1} \quad \begin{matrix} i\to 1,\cdots,l \\ j\to 1,\cdots,l \end{matrix}\right|_{x_1=0}=0,$$

因此存在着函数 $\lambda_i(x')$ $(i=1, 2, \cdots, l)$,使得

$$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}(x_2', \cdots, x_n')\neq\{0, \cdots, 0\},$$

而且
$$\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i\tilde{a}_{ij1})_{x_1=0}=0.$$

对于这些函数 $\lambda_i$, 令

$$\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i\tilde{a}_{ij\mu})_{x_1=0}=\alpha_{j\mu}(x_2', \cdots, x_n'),$$

$$\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i\tilde{b}_i)_{x_1=0}=\beta(x_2', \cdots, x_n', u),$$

则由(3.3)式并用簡写記号 $x'=(x_2', \cdots, x_n')$,就得到

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=2}^{n}\alpha_{j\mu}(x')\partial_\mu' u_j+\beta(x', u)=0. \tag{3.7}$$

这就是說,"在特征面 $S$ 上,这 $l$ 个函数 $u_i$ 是 $n-1$ 个独立变数 $x'$ 的函数,这些函数应該满足一个偏微分方程(3.7)(当 $n=2$ 时,方程成为常微分方程)",故在特征面 $S$ 上,就不能够任意地給定作为初始值的函数。

**例 1** $\partial_x u-\partial_y v=0$, $\partial_x v+\partial_y u=0$.

这个方程的特征方程是

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xi_1+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\xi_2\right|=\begin{vmatrix}\xi_1 & -\xi_2\\ \xi_2 & \xi_1\end{vmatrix}=\xi_1^2+\xi_2^2.$$

所以在实数范圍内并不存在特征面 $\phi(x, y)=0$. 因此,当函数 $\phi(x, y)$ 是滿足 $\{\phi_x, \phi_y\}(x^0, y^0)\neq\{0, 0\}$,及 $\phi(x^0, y^0)=0$ 的实解析正则函数,而在 $(x^0, y^0)$ 的邻域可以給定任意的实解析正則函数作为 $u$, $v$ 的初始值时,这組联立方程在 $(x^0, y^0)$ 的邻域就存在着唯一的一組正則解。

**2. 高阶半綫性方程的情形** 现在研究一下 $p$ 阶半綫性方程

$$\sum_{1\leq\nu\leq n}a_{\nu_1\cdots\nu_p}(x)\partial_{\nu_1\cdots\nu_p}^p u+f(x, u, \partial_x u, \cdots)=0 \tag{3.8}$$

($f$ 內包含最高到 $u$ 的 $p-1$ 阶导函数)。对曲面 $S:\phi(x)=0$ 的初始值問題，和前一节一样地引入函数 $\phi_1=\phi, \phi_2, \cdots, \phi_n$，并象(3.2)那样地作变数变换，則有

$$\partial_\mu u=\sum_{\lambda=1}^{n}\partial'_\lambda u\cdot\partial_\mu\phi_\lambda,$$

$$\partial^2_{\mu\nu}u=\sum_{\kappa,\lambda=1}^{n,n}\partial'^2_{\kappa\lambda}u\cdot\partial_\mu\phi_\kappa\partial_\nu\phi_\lambda+\sum_{\kappa=1}^{n}\partial'_\kappa u\cdot\partial^2_{\mu\nu}\phi_\kappa,$$

一般地有

$$\partial^p_{\nu_1\cdots\nu_p}u=\sum_{1\le\kappa\le n}\partial'^p_{\kappa_1\cdots\kappa_p}u\cdot\partial_{\nu_1}\phi_{\kappa_1}\cdots\partial_{\nu_p}\phi_{\kappa_p}+*** \tag{3.9}$$

(*** 中包含最高到 $u$ 的 $p-1$ 阶导函数)。即变换后的方程仍是 $p$ 阶的半綫性方程

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{1\le\kappa\le n}\tilde a_{\kappa_1\cdots\kappa_p}(x')\partial'^p_{\kappa_1\cdots\kappa_p}u+\tilde f(x', u, \partial_x u, \cdots)=0,\\ \text{其中}\quad&\tilde a_{\kappa_1\cdots\kappa_p}=\sum_{1\le\nu\le n} a_{\nu_1\cdots\nu_p}\partial_{\nu_1}\phi_{\kappa_1}\cdots\partial_{\nu_p}\phi_{\kappa_p}\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

(其中 $\tilde f$ 包含最高到 $p-1$ 阶导函数)。这里 $\partial'^p_{1\cdots1}$ 的系数是

$$\tilde a_{1\times(p)}=\sum_{1\le\nu\le n} a_{\nu_1\cdots\nu_p}\partial_{\nu_1}\phi\cdots\partial_{\nu_p}\phi. \tag{3.11}$$

因此，如果(3.11)$\neq0$，則以 $x'_1$ 作为时間变数，这个方程就化成了标准型的 $p$ 阶半綫性偏微分方程。

現在对于任意的 $\xi_1, \cdots, \xi_n$，我們把下列的 $p$ 次齐次方程

$$\sum_{1\le\nu\le n} a_{\nu_1\cdots\nu_p}(x^0)\xi_{\nu_1}\cdots\xi_{\nu_p}=0 \tag{3.12}$$

叫做方程(3.8)在点 $x^0$ 处的**特征方程**。如果曲面 $S:\phi(x)=0$ 在 $x^0$ 处的 $\xi=\partial_\nu\phi(x^0)$ 满足(3.12)，那么就說 $S$ 在 $x^0$ 处是**特征**。于是有下面的定理。

**定理 3.2** 設 $\phi(x)=0$ 在 $x^0$ 处不是特征，对于初始条件 $x'_1=0, u=\psi_0(x'), \partial'^i_1 u=\psi_i(x')(i=1,\cdots,p-1)$，方程(3.8)当 $x=x^0$ 时存在着唯一的正則解。在这里还要假定一切已給的函数都是解

析而且正则的,并且 $\psi_i$ 連同它的由一阶到 $p-i$ 阶导函数的値,都包含在正則的 $\tilde{f}$ 的变数域之内。

此外,若是所有 $S$ 的点都是特征的話,那么 $S$ 就叫做(3.8)的**特征面**。这时在 $S$ 上有 $x_1'=0$, 所以(3.10)中只留下了 $n-1$ 个独立变数 $x_2'$, $\cdots$, $x_n'$, 并且这 $p$ 个函数 $\psi_0$, $\cdots$, $\psi_{p-1}$ 应該满足一个偏微分方程(当 $n=2$ 时为常微分方程)。这个方程对于 $\psi_i$ 的最高阶数为 $p-i$.

最后我們可以对联立高阶半綫性方程組($u_i$ 的阶数为 $p(i)$):

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n}a_{ij,\nu_1\cdots\nu_{p(j)}}(x)\,\partial_{\nu_1\cdots\nu_{p(j)}}^{p(j)}u_j+f_i(x,\ u,\partial_x u,\cdots)=0$$
$$(i=1,\ \cdots,\ l) \tag{3.13}$$

进行同样的討論,这时在点 $x^0$ 处的特征方程是 $p(1)+\cdots+p(l)$ 次的齐次方程

$$\left|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n}a_{ij,\nu_1\cdots\nu_{p(j)}}(x^0)\,\xi_1\cdots\xi_{p(j)}\qquad {}_{j=1,\cdots,l}^{i=1,\cdots,l}\right|=0. \tag{3.14}$$

**例 2** $\partial_x^2 u-\sum_{\mu=1}^{m}\partial_{y_\mu}^2 u=0$.

这个方程的特征面的方程是

$$(\partial_x\phi)^2-\sum_{\mu=1}^{m}(\partial_{y_\mu}\phi)^2=0.$$

若是令 $\phi=x-\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu y_\mu$, 那么平面 $\phi=0$ 成特征的条件显然是 $\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu^2-1=0$. 因此,假設 $\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu^2\neq 1$, 那么在这样的 $S:\phi=0$ 上,可以給定任意的解析而正則的函数,作为 $u$ 以及它沿着 $S$ 的法綫方向的导数 $\partial_n u$ 的値。于是在 $S$ 的邻域就存在着方程的唯一的解 $u=u(x,\ y)$.

**习题 1** 对一阶的单独半綫性方程

$$\sum_{\mu=1}^{n}a_\mu(x)\partial_\mu u+b(x,\ u)=0,$$

求它的特征面方程。

**习题 2** 求联立一阶方程組($x$, $y$ 是独立变数)

$$\partial_x u_i-\sum_{j=1}^{l}a_{ij}(x,\ y)\partial_y u_j=f_i(x,\ y,\ u)\quad(i=1,\ \cdots,\ l)$$

的特征方程。

**习题 3**　如果

$$\phi \equiv x^2 - \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu y_\mu^2 - \beta = 0$$

是例 2 中微分方程的特征面，求常数 $\alpha_\mu$，$\beta$。

**注意**　关于非綫性偏微分方程的特征方程可以参看 Petrovski: Lectures on partial differential equations, pp. 32～34。不过在那里曾提到了非綫性方程"是利用解来定义特征方程的"。事实上，关于解的存在的假設是不必要的，我們只要利用方程中所出現的未知函数以及它的微分系数所取的"值"就能定义特征方程。

## §4　Holmgren 定理

**1. Holmgren 定理**　我們在§2中已講过，对于解析而正則的基准型微分方程，初始值(正則)問題存在着一組正則解。但是对于同样的初始值是否能有其他的解(譬如非正則的)呢？关于这个問題，Holmgren 在1901年就系数是解析而正則的联立一阶"綫性"方程組(基准型)的情形，証明了一般初始值問題的解的唯一性。

**定理 4.1**　設在綫性基准型偏微分方程組

$$\partial_x u_i = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{m} a_{ij\mu}(x, y) \partial_\mu u_j + \sum_{j=1}^{l} b_{ij}(x, y) u_j + c_i(x, y)$$

$$(\partial_\mu = \partial_{y_\mu}) \quad (i=1, \cdots, l) \qquad (4.1)$$

中，$a_{ij\mu}$，$b_{ij}$ 对 $(x^0, y^0)$ 是解析而正則的函数。这时，在 $(x, y) = (x^0, y^0)$ 的适当的邻域，对于同一个初始条件 $u_i(x^0, y) = \phi_i(y)$ ($\phi_i$ 是連續可微的)，方程 (4.1) 有一組唯一的連續可微的解。

**証明**　假設对于同一个初始条件，方程組 (4.1) 存在着两組解，令它們的差是 $v_i (i=1, \cdots, l)$，則 $v_i$ 滿足方程組

$$\partial_x v_i = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{m} a_{ij\mu} \partial_\mu v_j + \sum_{j=1}^{l} b_{ij} v_j \quad (i=1, \cdots, l), \qquad (4.2)$$

和初始值条件 $v_i(x^0, y)=0$。现在我們来証明，在$(x^0, y^0)$的邻域必定有 $v_i\equiv 0$。不失問題的一般性可以令 $(x^0, y^0)=(0, 0)$。引入变数变換

$$x'=x+\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2, \quad y'_\mu=y_\mu \quad (\mu=1,\cdots, m)$$

把独立变数变成 $x'$, $y'$，于是

$$\partial_x v_i=\partial'_x v_i, \quad \partial_\mu v_i=\partial'_\mu v_i+2y'_\mu \partial'_x v_i.$$

从而(4.2)就成为

$$\sum_{j=1}^{l}\Big(\delta_{ij}-\sum_{\mu=1}^{m} 2y'_\mu a'_{ij\mu}\Big)\partial'_x v_j=\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m} a'_{ij\mu}\partial'_\mu v_j+\sum_{j=1}^{l} b'_{ij} v_j$$
$$(i=1, \cdots, l). \tag{4.3}$$

这里

$$a'_{ij\mu}=a_{ij\mu}(x'-\sum y'^2_\mu, y'), \quad b'_{ij}=b_{ij}(x'-\sum y'^2_\mu, y').$$

当 $|y'|$ 适当小时，由于

$$\left|\delta_{ij}-\sum_{\mu=1}^{m} 2y'_\mu a'_{ij\mu} \quad {}^{i=1,\cdots,l}_{j=1,\cdots,l}\right|\neq 0,$$

所以由(4.3)中解出 $\partial'_x v_i$，就得到

$$\partial'_x v_i=\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m} \tilde{a}_{ij\mu}\partial'_\mu v_j+\sum_{j=1}^{l}\tilde{b}_{ij} v_j \quad (i=1,\cdots, l). \tag{4.4}$$

这里 $\tilde{a}_{ij\mu}$, $\tilde{b}_{ij}$ 在$(x', y')=(0, 0)$处正則。又初始条件是

$$x'=\sum_{\mu=1}^{m} y'^2_\mu \text{ 时}, \quad v_i=0.$$

下面我們指出，在$(0, 0)$适当的邻域，当 $x'>\sum_{\mu=1}^{m} y'^2_\mu$ 时，$v_i=0$。

首先我們定义两个微分运算子 $F_i$ 及 $F_i^*$：

$$F_i[v]\equiv\partial'_x v_i-\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m}\tilde{a}_{ij\mu}\partial'_\mu v_j-\sum_{j=1}^{l}\tilde{b}_{ij} v_j,$$

$$F_i^*[w]\equiv-\partial'_x w_i+\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m}\partial'_\mu(\tilde{a}_{ij\mu} w_j)-\sum_{j=1}^{l}\tilde{b}_{ji} w_j.$$

对于任意連續可微的函数 $v$, $w$，就有

$$\sum_{i=1}^{l}(w_iF_i[v]-v_iF_i^*[w])$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\left\{\partial_x'(v_iw_i)-\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m}\partial_\mu'(\tilde{a}_{ij\mu}v_jw_i)\right\}. \qquad (4.5)$$

現在令 $K$ 代表 $E^{m+1}$ 空間中的曲面 $x'=\sum_{\mu=1}^{m}y_\mu'^2$（$m$ 維）；$L_a$ 代表平面 $x'=a\ (>0)$（$m$ 維），并且令 $K_a$ 是$K$ 上滿足 $0\leqslant x'\leqslant a$ 的部分。再令 $K_a$ 与 $L_a$ 所界的空間为 $H_a(m+1$ 維)。(适当地选取 $a>0$ 的話)那么在 $K_a$ 上就有 $v_i=0$，而在 $H_a$ 内由于(4.4)而有 $F_i[v]=0$。現在設 $w_i$ 是在 $H_a+K_a+L_a$ 内連續可微的函数，并且滿足

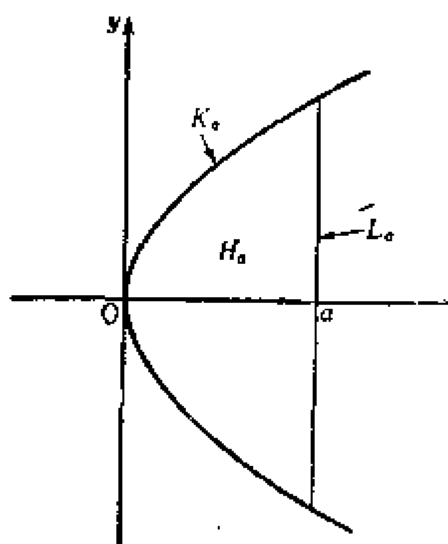


图 4.1

$$F_i^*[w]=0, \qquad (4.6)$$

則由于(4.5)，就有

$$\iint_{H_a}\sum_{i=1}^{l}(w_iF_i[v]-v_iF^*[w])dx'd^my'=0$$
$$=\iint_{H_a}\partial_x'\left(\sum_{i=1}^{l}v_iw_i\right)dx'd^my'-\sum_{i,j=1}^{l,l}\sum_{\mu=1}^{m}\iint_{H_a}\partial_\mu'(\tilde{a}_{ij\mu}v_jw_i)dx'd^my'$$
$$=\int_{L_a}\left(\sum_{i=1}^{l}v_iw_i\right)d^my'-\int_{K_a}\left(\sum_{i=1}^{l}v_iw_i\right)d^my'$$
$$-\sum_{i,j=1}^{l,l}\sum_{\mu=1}^{m}\int_{K_a}(\tilde{a}_{ij\mu}v_jw_i)dx'd^{m-1}y'_{(\mu)}$$
$$(d^{m-1}y'_{(\mu)}=dy_1'\cdots dy_{\mu-1}'dy_{\mu+1}'\cdots dy_m'),$$

再由于在 $K_a$ 上有 $v_i=0$，所以

$$\int_{L_a}\left(\sum_{i=1}^{l}v_iw_i\right)d^my'=0. \qquad (4.7)$$

但是根据§2，若 $\phi_i(y')$是任意的有理函数，則方程(4.6)有解 $w_i$，使得在 $x'=a$ 处，$w_i=\phi_i(y')$。这个解的存在域(当 $a$ 适当小的

时)与 $a$ 及 $\phi_i(y')$ 的选擇无关(見 §2 注意 3)。因此 (4.6) 在全部 $H_l$ 中成立，并且在 (4.7) 中令 $w_i=\phi_i(y')$ 也成立。可是 $L_a$ 被 $K$ 所截的部分是有界的閉集，所以据 Weierstrass 定理能够选擇一个有理函数列 $\{\phi_i(y')\}$，使它們一致地收斂于函数 $v_i$。作了这样的极限过程以后，就得到

$$\int_{L_a}\left(\sum_{i=1}^{l} v_i^2\right)d^m y'=0 .$$

所以在 $L_a$ 上有 $v_i=0$。但是这里的 $a>0$ 在适当的范圍内是可以任意选擇的，从而在 $(x',y')=(0,0)$ 适当的邻域，当 $x'>\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu'^2$ 时有 $v_i=0$。如果把独立变数由 $(x',y')$ 变回到 $(x,y)$，那么就是說，在 $(x,y)=(0,0)$ 适当的邻域、当 $x>0$ 时，有 $v_i=0$。自然可以用 $-x$ 代替 $x$，于是对 $x<0$ 同样得到了 $v_i=0$。 証毕

**注意** 在定理 4.1 的証明中曾用到了 $F_i^*$ 的系数的解析正則性，即 $a_{ij\mu}$ 及 $b_{ij}$ 都是正則函数。若是不假設系数的正則性，那么就不能够得到与方程类型无关的結果。对于二个独立变数 $(m=1)$ 的方程，Carleman 在 1939 年曾得到了下面的結果。

設在 $0\leqslant x<\alpha$, $|y|<\beta$ 时，$a_{ij}$ (因为这里 $\mu=1$，所以 $\mu$ 略去不写) 二次連續可微，$b_{ij}$ 連續 ($c_i$ 也連續)，此外設矩陣 $(a_{ij})$ 沒有相同的本征值，即 $\lambda$ 的 $l$ 次方程

$$\left| a_{ij}-\delta_{ij}\lambda \quad {}_{j=1,\cdots,l}^{i=1,\cdots,l} \right|=0 \tag{4.8}$$

沒有相等的根 (对于不是实根的情形也一样)，那么对于同一个初始条件 $u_i(0,y)=\phi_i(y)$，方程在 $(0,0)$ 适当的邻域，当 $0\leqslant x$ 时，只有唯一的一組解。参看 T. Carleman: Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendentes. Arkiv för Math. Ast. och Fysik **26**.

有許多的學者努力于把 Carleman 定理一般化的工作，主要是要消除对于 (4.8) 中根的限制条件，但是都沒有收到成果。最近 Plis 在 1954 年曾指出，若是不对 (4.8) 的根附加条件，那么能作成一个例子，这时虽設 $a_{ij}$ 无限次連續可微，$b_{ij}=0$ 而 $u_i$ 也无限次連續可微，并且 $u_i$ 与它的任意阶导函数在

$x=0$ 处都等于 0，但是在 $x=0$ 的邻域 $u_i$ 仍能够不恒等于零。这个例子是值得引起我們注意的。見 Pliś: The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations. Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sci. 2(1954). pp. 55～57.

**2. 一般的 Cauchy 問題**　前节对基准型方程叙述了 Holmgren 定理。利用 § 3 中的方法，可以把它推广到一般 Cauchy 問題的情形。現在考虑以 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 为独立变数的联立一阶綫性方程組

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{n} a_{ij\nu}(x)\partial_\nu u_j+\sum_{j=1}^{l} b_{ij}(x)u_j+c_i(x)=0 \quad (i=1, \cdots, l), \tag{4.9}$$

并設系数 $a_{ij\nu}$, $b_{ij}$ 在 $x=x^0$ 处都是解析而正則的。若在 $E^n$ 中有曲面 $S:\phi(x)=0$，它是非特征的［即(3.4)成立］，$\phi(x^0)=0$，而且 $\phi$ 在 $x=x^0$ 是正則的話，那么适当选擇在 $x=x^0$ 处正則的函数 $\phi_2, \cdots, \phi_n$，可作(3.2)的变数变换。变换的結果，就能得到在 $x'=x'^0$ 的邻域与 (4.9) 同等的基准型方程組，并且它的系数在 $x'=x'^0$ 处是正則函数。于是根据 Holmgren 定理就能知道，方程組(4.9)存在唯一的一組解，它在 $x=x^0$ 的邻域連續可微，并且在 $S$ 上取已給的值作为初始値。

特別是，当特征方程(3.5)不具有实向量 $\xi(\xi\neq 0)$ 的解的时候，我們就称方程 (4.9)［或是 (3.1)］在 $x=x^0$ 处为**橢圓型**的。§ 3 例 1 的方程在全平面中是橢圓型的。設方程 (4.9) 的系数 $a_{ij\nu}$ 及 $b_{ij}$ 在空間 $E^n$ 的某一个开区域 $D$ 中是（实）解析正則的，并且对于所有 $D$ 的点，(4.9)是橢圓型的。这时，若(4.9)的两組在 $D$ 中連續可微的解在 $D$ 内一点 $x=a$ 的邻域（无論这个邻域多么小）一致，那么这两組解就在全部 $D$ 中一致。要証明这个事实，只要証明 $c_i(x)\equiv 0$ 的方程(4.9)在 $x=a$ 的邻域的解 $u=u(x)=0$ 必在整个 $D$ 中等于零卽可。現在用反証法，假設在 $D$ 中的某一部分 $u(x)\neq 0$. 因为根据假設，在 $D$ 内使得 $u(x)=0$ 的部分具有内点，所以

可以在 $D$ 内适当地作成一个球 $\phi \equiv \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - a'_\nu)^2 - r^2 \leqslant 0$，使得当 $\phi<0$ 时，$u(x)=0$，并且对于球面 $\phi=0$ 上有一点 $x=x^0$，在这个点的无論多小的邻域中一定存在着这样的点，使得 $u(x)\neq 0$。但是由于 $\phi(x)$ 在 $x=x^0$ 处正则而且不是特征的，所以满足"当 $\phi=0$ 时，$u(x)=0$"的解 $u(x)$ 在 $x=x^0$ 的邻域中一定等于零。因此若在 $D$ 中假設存在着 $u(x)\neq 0$ 的部分，就能得出矛盾。所以在整个 $D$ 中 $u(x)=0$。

这里所講的椭圓型定义，以及解的唯一性定理，可以推广到高阶綫性微分方程的情形。我們可以預測，当椭圓型綫性偏微分方程的系数不是解析而正則时，唯一性定理也能成立。可是对最一般的情形現在还沒有能够得到証明。

由于高阶的方程利用独立变数的变换 (3.2) 可以轉化成为联立一阶方程組 (2.10)，所以对于高阶偏微分方程的一般 Cauchy 問題（$\phi$ 正則，$S:\phi=0$ 非特征），Holmgren 定理仍然成立。我們現在举波动方程为例

$$\partial_x^2 u - \sum_{\mu=1}^{m}\partial_{y_\mu}^2 u = 0. \tag{4.10}$$

在空間 $E^{m+1}$ 中以 $(x, y)=(a, 0)$ 为頂点的錐面

$$K_a:\quad (x-a)^2 - \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2 = 0 \quad (a>0)$$

是方程 (4.10) 的特征面。設平面 $x=0$ 被这个錐面所截的部分 $\left(x=0, \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2 \leqslant a^2\right)$ 为 $S_a$，并令界在 $S_a$ 与 $K_a$ 之間的空間部分为

$$H_a:\quad 0<x<a, \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2 < (x-a)^2.$$

現在設在 $S_a$ 上給定了 $u$ 及 $u_x$ 的初始値。我們来証明，方程 (4.10) 的二次連續可微的解 $u$ 在 $H_a$ 中是唯一决定的。为了这个目的，只要指出，在 $S_a$ 上 $u=0$, $u_x=0$ 的解，在 $H_a$ 中 $u\equiv 0$ 即可。首先

把 $H_a$ 縮小一些使之成为 $H_{a'}(0<a'<a)$。对于任意的 $\lambda$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$，考虑曲面

$$\phi_\lambda\equiv\lambda\left\{(x-a')^2-\sum_{\mu=1}^{m}y_\mu^2\right\}-(1-\lambda)x=0.$$

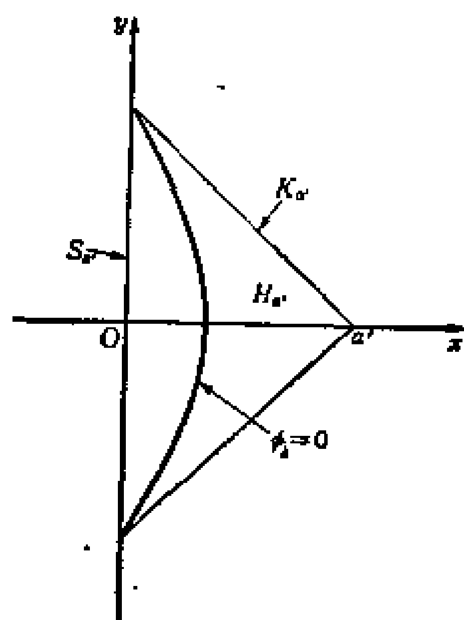



图 4.2

显然 $\phi_\lambda=0(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 不会有特征点。当 $\lambda$ 由 0 变到 1 时，曲面 $\phi_\lambda=0$ 将通过 $H_{a'}$ 中的每一个点。当 $\lambda=0$ 时，曲面 $\phi_\lambda=0$ 与平面 $x=0$ 一致。但是根据 Holmgren 定理，(4.10) 在 $S_a$ 上满足 $u=0$, $u_x=0$ 的解，必然在 $S_{a'}$ 的适当邻域中满足 $u\equiv0$。也就是說，当 $\lambda(\geqslant0)$ 充分小的时候，在 $\phi_\lambda=0$ 的落在 $H_a$ 内的部分上，$u$ 与它的导函数都等于零。假若现在 $u$ 不在整个 $H_{a'}$ 内都満足 $u=0$，那么一定存在着一个适当的数 $\bar\lambda$，满足 $0<\bar\lambda\leqslant1$，使得对于所有满足 $0\leqslant\lambda\leqslant\bar\lambda$ 的 $\lambda$，在 $\phi_\lambda=0$ 的落在 $H_{a'}$ 内的部分上，$u$ 及它的导函数都等于零，但是对 $\lambda>\bar\lambda$（无論 $\lambda$ 距 $\bar\lambda$ 多近）結果就不成立。现在因为在 $\phi_{\bar\lambda}=0$ 的落在 $H_{a'}$ 内的部分上，$u$ 及它的导函数都等于零，所以根据 Holmgren 定理，对于满足 $\bar\lambda\leqslant\lambda<\bar\lambda+\delta$（$\delta$ 相当的小）的 $\lambda$，在 $\phi_\lambda=0$ 的落在 $H_a$ 的部分上，$u$ 与它的导函数都等于零，这样就引出了矛盾。故在整个 $H_{a'}$ 中 $u=0$。由于 $a'$ 收斂于 $a$，所以在整个 $H_a$ 中 $u=0$。这就是說在 $H_a$ 内，$u$ 的值是由它在 $S_a^*$ 上的初始值 $u$ 及 $u_x$ 所决定的。因此在这种意义下，我們把 $H_a$ 叫做 $S_a$ 的决定区域。

**习題**　对于 $m=1$ 的情形，具体驗算波动方程对于 $|y|<a$ 的决定区域是 $y^2<(x-a)^2$, $|x|<a$ [参照(2.5)]。

# 第2章　一阶拟綫性偏微分方程

本章叙述一些单独的一阶拟綫性偏微分方程的一般性质以及求解的方法。在本章中，如不特别加以說明，我們假設所考虑的函数都是在某一个适当范圍（卽在一个維数等于独立変数个数的空間的开区域中）內連續可微并仅取实数值的函数。

## §5　特征曲綫

首先为了使問題簡单化，我們討論两个独立变数 $x, y$ 的情形。設所給的方程是

$$A(x, y, u)\partial_x u+B(x, y, u)\partial_y u=C(x, y, u). \qquad (5.1)$$

現在把 $x, y, u$ 当作直角坐标来考虑，則 (5.1) 的解 $u=u(x, y)$ 是某一个曲面上的点的集合，如令 $(x, y, u)$ 处曲面的法綫向量为 $\boldsymbol{n}$（适当地取它的大小），則

$$\boldsymbol{n}=(\partial_x u, \partial_y u, -1).$$

又在点 $(x, y, u)$ 处引入向量 $\boldsymbol{m}$ (**Monge 向量**)，它的定义是

$$\boldsymbol{m}=\{A(x, y, u), B(x, y, u), C(x, y, u)\}.$$

根据 (5.1)，$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的数量积等于 0，卽

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=A\partial_x u+B\partial_y u-C=0.$$

这就是說，$\boldsymbol{m}$ 处处正交于曲面 $u=u(x, y)$ 的法綫 $\boldsymbol{n}$，卽 $\boldsymbol{m}$ 与曲面 $u=u(x, y)$ 相切。于是得到下面的結果。

**定理 5.1**　函数 $u=u(x, y)$ 是方程 (5.1) 的解的充分必要条件是，在 $u=u(x, y)$ 上的每个点 $(x, y, u)$ 处，Monge 向量 $\boldsymbol{m}$ 与曲面 $u=u(x, y)$ 相切。

下面討論多个独立变数的情形，这里取 $x=(x_1, \cdots, x_n)$。此外，

設所給的方程为

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x, u)\partial_\nu u = F(x, u). \tag{5.2}$$

这时，在 $E^{n+1}$ 空間的 Monge 向量定义为

$$\boldsymbol{m} = \{A_1(x, u), \cdots, A_n(x, u), F(x, u)\}, \tag{5.3}$$

和前面一样有如下的結果：

**定理 5.2** 函数 $u=u(x)$ 是方程(5.2)的解的充分必要条件是，在 $u=u(x)$ 上的每个点 $(x, u)$ 处，Monge 向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $u=u(x)$ 相切。

因此我們要研究在 $E^{n+1}$ 中 Monge 向量所作成的向量場，它显然滿足下列的常微分方程組

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x_\nu = A_\nu(x_1, \cdots, x_n, u) \quad (\nu=1, \cdots, n), \\ &\frac{d}{dt}u = F(x_1, \cdots, x_n, u). \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

这組方程叫做方程(5.2)的**特征微分方程組**。它的解是曲綫 $(x,u)=\{x, u\}(t)$（$t$ 是曲綫的参变数），这种曲綫叫做方程(5.2)的**特征曲綫**。于是得到了下面的定理。

**定理 5.3** $u=u(x)$ 是 (5.2) 的解的充分必要条件是，經过 $u=u(x)$ 每一个点的特征曲綫一定落在曲面 $u=u(x)$ 上。

**証明** 首先証明充分性。

显然在曲面 $u=u(x)$ 上的每个点处，Monge 向量与曲面相切（通过直接代入方程即得），但是 Monge 向量是特征曲綫的切綫，故充分性成立。

为了証明必要性，設 $u=u_0(x)$ 是方程(5.2)的解，$(\xi, \zeta)$ 是曲面上的一点，即 $\zeta=u_0(\xi)$。現在考虑 $x$ 的常微分方程

$$\frac{d}{dt}x_\nu = A_\nu(x, u_0(x)) \quad (\nu=1,\cdots, n). \tag{5.5}$$

設这組方程滿足条件"当 $t=0$ 时，$x=\xi$"的解是 $x=x(t)$，并令

$$u_0(x(t))=u(t), \tag{5.6}$$

由于 $\{x, u\}(0)=\{\xi, u_0(\xi)\}=\{\xi, \zeta\}$，并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t)&=\sum_{\nu=1}^{n}(\partial_\nu u_0)_{x=x(t)}\frac{dx_\nu}{dt}\\&=\sum_{\nu=1}^{n}\{\partial_\nu u_0\cdot A_\nu(x, u_0(x))\}_{x=x(t)}\\&=\{F(x, u_0(x))\}_{x=x(t)}\ [\text{因为 } u_0(x)\text{ 是(5.2)的解}],\end{aligned}$$

所以由(5.5)及(5.6)就有

$$\frac{d}{dt}\{x, u\}(t)=\{A_1(x, u), \cdots, A_n(x, u), F(x, u)\}(t),$$

这就是說，曲面 $u=u_0(x)$ 包含着通过它上面的点 $(\xi, \zeta)$ 的特征曲綫 $(x, u)=\{x, u\}(t)$，这条曲綫显然是唯一的。 証毕

**例** $\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\partial_\nu u=ku$（$k$ 常数）.

这个方程的特征微分方程是

$$\frac{d}{dt}x_\nu=x_\nu(\nu=1, \cdots, n), \qquad \frac{d}{dt}u=ku.$$

所以当 $t=0$ 时，$(x, u)=(\xi, \zeta)$ 的解是

$$x_\nu=\xi_\nu e^t, \ u=\zeta e^{kt}.$$

設 $e^t=\lambda$，則 $\lambda$ 是任意的大于零的变量。現在把 $(\xi, \zeta)$ 考慮为 $u=u(x)$ 上面的任意的点，于是 $(\lambda\xi, \lambda^k\zeta)$，$\lambda>0$ 也是 $u=u(x)$ 上的点。这就是說，$u$ 必需滿足条件：$u(\lambda\xi_1, \cdots, \lambda\xi_n)=\lambda^k u(\xi_1, \cdots, \xi_n)$. 因为 $\xi$ 是任意的，可取为 $x$，并由 $\lambda>0$，上面的条件就是

$$u(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)=\lambda^k u(x_1, \cdots, x_n),$$

卽 $u(x)$ 是 $k$ 次的齐次函数。

**注意** 如果把方程(5.2)的两边同乘以一个函数 $M(x, u)\neq 0$，則得到一个与(5.2)等价的方程。因为 Monge 向量乘以数量 $M(x, u)\neq 0$ 后方向不变，并且特征曲綫的参变数可允許作任意的变换，为了反映这个性质，我們可以更好地采用下面不含参变数的对称形式来代替特征微分方程(5.4)，卽

$$\frac{dx_1}{A_1(x, u)}=\cdots=\frac{dx_n}{A_n(x, u)}=\frac{du}{F(x, u)}.$$

滿足 $\{A_1, \cdots, A_n\}(x^0, u^0)\neq\{0, \cdots, 0\}$ 这样的点 $(x^0, u^0)$ 叫做方程(5.2)

的正常点。如果 $(x^0, u^0)$ 不是 (5.2) 的正常点，那么 $\{A_1, \cdots, A_n\}\{x^0, u^0\}=\{0, \cdots, 0\}$。这个时候，如果 $x_0$, $u_0$ 再满足 $F(x^0, u^0)=0$，則通过点 $(x^0, u^0)$ 的特征曲綫 $(x, u)=\{x, u\}(t)$ 就蛻化成为这点 $(x^0, u^0)$ 本身。如果 $F(x^0, u^0)\neq 0$，則通过点 $(x^0, u^0)$ 的特征曲綫的切綫 (Monge 向量) 平行于 $u$ 軸 (即垂直于 $x$ 平面)，这时含有点 $(x^0, u^0)$ 的連續可微的解的曲面 $u=u(x)$ 是不存在的。

## §6　Cauchy 存在定理

根据定理 5.3，方程 (5.2) 的解的曲面 ($n$ 維) 是由无限多特征曲綫組成的。但是每一特征曲綫都是一維图形 (一般地說)，而解的曲面 $u=u(x)$ 是 $n$ 維的图形，所以通过在曲面 $u=u(x)$ 上作为 (适当的) 截口的 $n-1$ 維流形 (当 $n=2$ 时为曲綫) 上每点的特征曲綫的全体組成了曲面 $u=u(x)$。就是說，我們認为方程 (5.2) 的解，可以把要求它包含一个 $n-1$ 維的初始流形 (下面 $s$ 表示参变数)

$$\left.\begin{array}{ll} x_\nu=\alpha_\nu(s_1, \cdots, s_{n-1}) & (\nu=1, \cdots, n), \\ u=\beta(s_1, \cdots, s_{n-1}) & \end{array}\right\} \tag{6.1}$$

作为条件来决定。用确切的語言来叙述，且用 $s=(s_1, \cdots, s_{n-1})$ 的写法，就有

**定理 6.1**　設初始流形 (6.1) 满足条件

$$\left| A_i(\alpha(s), \beta(s)) \quad \partial_\mu \alpha_i(s) \quad {}^{i=1, \cdots, n}_{\mu=1, \cdots, n-1} \right| \neq 0, \tag{6.2}$$

而 $(x^0, u^0)$ 是 (6.1) 上的任意的点，則在 $x=x^0$ 的适当的邻域中，存在着方程 (5.2) 的唯一的一組解，它满足条件：当 $x=\alpha(s)$ 时，$u=\beta(s)$。

**証明**　設当 $t=0$ 时，满足条件 $(x, u)=\{\alpha, \beta\}(s)$ 的方程 (5.4) 的解 (特征曲綫) 是

$$(x, u)=\{X, U\}(t, s), \tag{6.3}$$

則

$$\frac{D(X_1,\cdots,X_n)}{D(t,s_1,\cdots,s_{n-1})}\bigg|_{t=0}=\left|A_i(\alpha,\beta)\quad \partial_\mu\alpha_i\quad {}^{i=1,\cdots,n}_{\mu=1,\cdots,n-1}\right|\neq 0.\quad [(6.2)]$$

这个式子就意味着 $x=X(t,s)$ 这个函数关系把 $x=x^0$ 的邻域与 $(t,s)=(0,s^0)$ 的邻域作成了1对1的对应。因此可以认为 $t$, $s$ 是 $x$ 的函数(連續可微的)，即 $(t,s)=\{t,s\}(x)$。于是令

$$U(t(x),s(x))=u(x),$$

由于 $u=u(x)$ 是由特征曲綫的集合(6.3)所构成的曲面，所以它是(5.2)的解。又因为在 $x=x^0$ 的邻域中，$x=\alpha(s)$ 恰好对应着 $t=0$，所以当 $x=\alpha(s)$ 时，$u=\beta(s)$。

再者(5.2)的解的曲面 $u=u(x)$ 非包含通过(6.1)各点的特征曲綫不可，所以由(6.3)所构成的曲面必定是解的曲面。　　証毕

**例 1** $xu_x+yu_y=ku$.

試求这个方程包含初始曲綫 $(x,y,u)=\{\cos s,\sin s,\zeta(s)\}$ 的解。因为通过初始曲綫各点的特征曲綫是

$$(x,y,u)=\{\cos s\cdot e^t,\sin s\cdot e^t,\zeta(s)e^{kt}\},$$

所以能够得到关系 $s=\tan^{-1}(y/x)$, $t=\log\sqrt{x^2+y^2}$。因此

$$u=\zeta(\tan^{-1}(y/x))\cdot(x^2+y^2)^{k/2}.$$

在这个例題中，条件(6.2)是 $\begin{vmatrix}A_1 & \alpha_1'\\ A_2 & \alpha_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos s & -\sin s\\ \sin s & \cos s\end{vmatrix}=1$，所以总是成立的。

**例 2** $uu_x+u_y=1$.

設初始曲綫是 $(x,y,u)=\{s^2,2s,c+s\}$，特征微分方程就是 $x'=u$, $y'=1$, $u'=1$，所以通过初始曲綫各点的特征曲綫是

$$x=s^2+(c+s)t+t^2/2,\quad y=2s+t,\quad u=c+s+t.$$

把 $s$, $t$ 解成 $x$, $y$ 的函数，并代到最后一式，则有

$$u=\frac{y}{2}-c\pm\sqrt{x+c^2-y^2/4}.$$

現在条件(6.2)是 $\begin{vmatrix}c+s & 2s\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2c$，所以当 $c\neq0$ 时，条件(6.2)成立；当

$s=0$ 时，不成立。这个时候由于 $(x, y)=(s^2, 2s)$，所以有 $x-y^2/4=0$，于是解的曲面到平面 $(x, y)$ 的正射影，仅仅在这条曲綫 $x-y^2/4=0$ 的一側是实的。而在这条曲綫上，$u_x(u_y)$ 的値成为 $\infty$。

**注意 1**　在定理 6.1 中只要假設函数 $A_\nu(x, u)$，$F(x, u)$，$\alpha_\nu(s)$，$\beta(s)$ 都一次連續可微就够了。此外，若是这些函数都 $k$ 次連續可微，那么解 $u=u(x)$ 也就 $k$ 次連續可微。再如果这些函数都是解析正則的話，那么解 $u=u(x)$ 也是解析正則的。

**注意 2**　空間 $E^{n+1}$ 中的特征曲綫 $(x, u)=\{x, u\}(t)$ 到 $x$ 空間 $E^n$ 的正射影 $x=x(t)$ 叫做**基础特征曲綫**。条件(6.2)的几何意义就是說：基础特征曲綫不切于作为初始的基础流形 $x=\alpha(s)$。

其次，如果(6.2)成立的話，則 $\{A_1, \cdots, A_n\}(\alpha(s), \beta(s)) \neq \{0, \cdots, 0\}$，所以可認为初始流形都是由正常点所組成的。相反，若是 $(x^0, u^0)$ 是正常点，我們在 $x=x^0$ 的适当的邻域，可取一个包含 $(x^0, u^0)$ 而 (6.2) 成立的初始流形。譬如假設 $A_1(x^0, u^0) \neq 0$，可以取

$$\alpha_1(s) \equiv x_1^0, \quad \alpha_2(s) \equiv s_1, \quad \cdots, \quad \alpha_n(s) \equiv s_{n-1},$$

$\beta(s)$ 可以取满足条件 $\beta(s^0)=u^0$ 的任意函数。这样 (6.2) 就在 $s=(x_2^0, \cdots, x_n^0)=s^0$ 的适当的邻域成立。在这种情况下，初始条件成为

$$x_1=x_1^0 \text{ 时} \quad u=\beta(x_2, \cdots, x_n)\text{。}$$

另外，因为 $A_1 \neq 0$，所以可以把 $x_1$ 認为是时間变数，而把方程化成为基准型。

**习题 1**　設条件(6.2)成立，則

$$\mathrm{Rk}\left(\partial_\mu \alpha_i \qquad \begin{smallmatrix} i=1,\cdots,n \\ \mu=1,\cdots,n-1 \end{smallmatrix}\right)=n-1.$$

于是在 $x^0=\alpha(s^0)$ 的邻域，不失去一般性，可以假設

$$\left|\partial_\mu \alpha_i \qquad \begin{smallmatrix} i=2,\cdots,n \\ \mu=1,\cdots,n-1 \end{smallmatrix}\right| \neq 0,$$

这个时候，如令

$$x_1=x_1'+\alpha_1(x_2', \cdots x_n'), \; x_\nu=\alpha_\nu(x_2', \cdots, x_n') \quad (\nu=2, \cdots, n),$$

把独立变数 $x$ 换成独立变数 $x'$，于是方程(5.2)就等价于一个以 $x_1'$ 为时間变数的基准型方程，这时的初始条件是

$$\text{当 } x_1'=0 \text{ 时，} \quad u=\beta(x_2', \cdots, x_n')\text{。}$$

(若解本题有困难的話，可先解下面的习題。)

**习题 2**　对于下列的微分方程求包含有初始曲綫的解。

(a) $xu_x+yu_y=2xy$,

初始曲綫 $(x, y, u)=(\cos s, \sin s, \sin 2s)$.

(b) $uu_x+u_y=u^2$,

初始曲綫 $(x, y, u)=(0, s, a/s)$.

## §7 变成齐次綫性方程的变换

### 1. 一阶齐次綫性微分方程

現在考慮方程

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x)\partial_\nu u=0. \tag{7.1}$$

这种方程的特征方程是

$$\frac{d}{dt}x_\nu=A_\nu(x) \qquad (\nu=1, \cdots, n), \quad \frac{d}{dt}u=0. \tag{7.2}$$

因此基础特征曲綫仅由前 $n$ 个方程就能完全决定，而与 $u$ 的初始値无关。这就是說，沿着每条基础特征曲綫的 $u$ 的値保持不变。反过来，沿着每条基础特征曲綫的函数値保持一定的函数 $u=u(x)$ 必是方程(7.1)的解。

一般地說，如果有一个函数 $f(x)$，它的函数値沿着微分方程組

$$\frac{dx_1}{A_1(x)}=\frac{dx_2}{A_2(x)}=\cdots=\frac{dx_n}{A_n(x)} \tag{7.3}$$

的每一条解曲綫 $x=x(t)$ 保持不变的話，则称这个函数 $f(x)$ 为(7.3)的**积分**。于是有这样的結果：$f(x)$是(7.3)的积分与 $u=f(x)$ 是(7.1)的解这两个事实是一致的。

現在設 $x=x^0$ 是 (7.1) 的正常点，并且假設 $A_1(x^0)\neq 0$ (在 $x=x^0$ 的邻域都成立)，在 (7.3) 中把 $x_1$ 看成是独立变数，那么(7.3)就成为普通的微分方程組

$$\frac{dx_\nu}{dx_1}=\frac{A_\nu(x)}{A_1(x)} \qquad (\nu=2, \cdots, n). \tag{7.4}$$

設方程組(7.4)的一般解是

$$x_{\nu+1}=\phi_\nu(x_1, c_1, \cdots, c_{n-1}) \qquad (\nu=1, \cdots, n-1) \qquad (7.5)$$

(这里 $c_1, \cdots, c_{n-1}$ 是积分常数),并且有

$$\frac{D(\phi_1, \cdots, \phi_{n-1})}{D(c_1, \cdots, c_{n-1})}\neq 0 \qquad (7.6)$$

(在 $x_1, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的适当的范圍中成立)。譬如我們把(7.5)看成是方程組(7.4)滿足条件 $x_1=x_1^0$ 时,$x_{\nu+1}=c_\nu$ 的解,则 $\phi_\nu(x_1^0, c_1, \cdots, c_{n-1})=c_\nu$,从而可得到(7.6)。于是令 $x_{\nu+1}^0=\phi_\nu(x_1^0, c^0)$,由于(7.5),故在 $x=x^0$ 适当的邻域,可以把 $c$ 解出成为 $x$ 的函数,从而得到与(7.5)等价的关系式:

$$c_\mu=f_\mu(x_1, \cdots, x_n) \qquad (\mu=1, \cdots, n-1). \qquad (7.7)$$

因为(7.7)与(7.5)是同等的,所以

$$f_\mu(x)_{x=\phi(x_1, c)}=c_\mu \qquad [x_1=\phi_0(x_1, c)], \qquad (7.8)$$

故 $f_\mu(x)$ 是(7.3)的积分,也就是(7.1)的解。此外由于(7.8),

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_{n-1})}{D(x_2, \cdots, x_n)}_{x=\phi}\cdot\frac{D(\phi_1, \cdots, \phi_{n-1})}{D(c_1, \cdots, c_{n-1})}=1,$$

所以

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_{n-1})}{D(x_2, \cdots, x_n)}_{x=x^0}\neq 0. \qquad (7.9)$$

上面我們仅在 $A_1(x^0)\neq 0$ 的假設下作了討論,一般地說,如果 $x=x^0$ 是方程(7.1)的正常点的話,那么在 $x=x^0$ 的邻域,必定存在着 $n-1$ 个方程(7.1)的解 $u=f_\mu$,并且滿足

$$\mathrm{Rk}\left(\partial_\nu f_\mu(x) \quad {}^{\mu=1,\cdots,n-1}_{\nu=1,\cdots,n}\right)=(n-1). \qquad (7.10)$$

此外,如果 $f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ 是方程(7.1)的解,则它們結合而成的函数

$$u=g(f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)) \qquad (7.11)$$

也是(7.1)的解(沿着每条基础特征曲綫函数值不变)。反过来,如

果 $x=x^0$ 是(7.1)的正常点，而 $u=f_\mu$ 是方程(7.1)满足条件(7.10)的解，則(7.1)的任意解一定可以写成(7.11)的形式(在 $x=x^0$ 的邻域)。事实上，如果 $A_1(x^0)\neq 0$，則由

$$\partial_1 f_\mu+\sum_{\nu=2}^{n} A_\nu(x)/A_1(x)\cdot\partial_\nu f_\mu=0$$

可得

$$\mathrm{Rk}\left(\partial_\nu f_\mu \quad {}^{\mu=1,\cdots,n-1}_{\nu=2,\cdots,n}\right)=\mathrm{Rk}\left(\partial_\nu f_\mu \quad {}^{\mu=1,\cdots,n-1}_{\nu=1,\cdots,n}\right)=n-1.$$

所以如令 $f_\mu(x^0)=c_\mu^0$，則在 $x=x^0$ 适当的邻域，利用(7.7)可以把 $x_2,\cdots,x_n$ 解出成为 $x_1, c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的函数，从而得到公式(7.5)。(7.5)是常微分方程組(7.3)的解。

現在若 $u=u(x)$ 是(7.1)的解，那么它在沿着(7.3)的解(7.5)上，必定有一定的值。于是

$$u(x)_{x=\phi(x_1,c)}=g(c_1,\ \cdots,\ c_{n-1}).\tag{7.12}$$

但是(7.5)与(7.7)是等价的，所以

$$\phi_\mu(x_1,\ c)_{c=f(x)}=x_{\mu+1},$$

于是在(7.12)中将 $c_\mu$ 换成 $f_\mu(x)$ 后，就得到

$$u(x)=g(f_1(x),\ \cdots,\ f_{n-1}(x)).$$

綜上所述，就得到了下面的定理。

**定理 7.1** 在(7.1)的正常点 $x=x^0$ 的邻域，方程(7.1)具有 $n-1$ 个满足条件(7.10)的解 $u=f_\mu$，(7.1)的任意解可以表达成为(7.11)的形式(其中 $g$ 是任意函数)。

**注意** 在定理 7.1 中，若是 $A_\nu(x)$ 为 $p$ 次連續可微，則 $f_\mu(x)$ 也 $p$ 次連續可微。若是 $A_\nu(x)$ 解析正則，則 $f_\mu(x)$ 也能够是解析正則的。至于这时关于(7.3)积分的討論，可以参看南云道夫著:《微分方程》I §5(共立社出版)。

**例 1** $xu_x+yu_y+zu_z=0$。

$u$ 是方程組

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

的积分。容易証明 $f_1=y/x$，$f_2=z/x$ 是方程組的两个积分，并且 $f_1, f_2$ 在

$x\neq 0$ 处满足条件(7.10)。所以当 $x\neq 0$ 时，

$$u=g(y/x,\ z/x)\quad (g\text{ 是任意函数})。$$

**例 2** $(y-z)u_x+(z-x)u_y+(x-y)u_z=0$.

$u$ 是方程組

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}\tag{*}$$

的积分，令(*)$=dt$，而把 $t$ 看成独立变数，則

$$\frac{d}{dt}x=y-z,\quad \frac{d}{dt}y=z-x,\quad \frac{d}{dt}z=x-y,\tag{**}$$

于是就有 $\frac{d}{dt}(x+y+z)=0$，卽 $f_1=x+y+z$ 是(*)的积分。另外由(**)有

$$2\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)=0.$$

所以 $f_2=x^2+y^2+z^2$ 也是(*)的积分。又因为除去 $x=y=z$ 以外，条件(7.10)恒成立，所以在正常点处(卽除去 $x=y=z$ 的情形)，有解

$$u=g(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)\quad (g\text{ 是任意函数})。$$

**2、变成齐次綫性方程的变换** 下面我們講一下，一般的一阶拟綫性偏微分方程可以变成齐次綫性方程而求解。

对于拟綫性方程(5.2)的解 $u=u(x)$，我們假設它可以写成隐函数的形式

$$f(x,\ u)=c,\ \text{这里 } f_u\neq 0,\tag{7.13}$$

其中 $c$ 是任意的常数(在某一个适当范圍内)。由(7.13)容易得到

$$\partial_\nu u(x)=-(f_{x_\nu}/f_u)_{u=u(x)}.\tag{7.14}$$

把这个結果代入(5.2)，就得到

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x,\ u)f_{x_\nu}+F(x,\ u)f_u\right\}_{u=u(x)}=0.$$

如果对于任意的 $c$ (在某一范圍内)，由(7.13)所定义的隐函数 $u=u(x,\ c)$ 都是方程(5.2)的解，那么 $u$ 的值也在某一个范圍内是任意的。于是可以把 $f$ 看成是依賴于独立变数 $x$ 及 $u$ 的函数，并且满足齐次綫性方程

$$\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x,\ u)\partial_{x_\nu}f+F(x,\ u)\partial_u f=0.\tag{7.15}$$

反过来，对于 (7.15) 的满足条件 $f_u \neq 0$ 的解 $f(x, u)$，可以根据 (7.13) 决定出 $u=u(x)$，再根据 (7.14) 就知道 $u=u(x)$ 是 (5.2) 的解。

现在还有一个問題，就是方程 (5.2) 所有的解是否都可以用这种方法得到？因此，我們要考虑到下面这个事实，即一切的解都是由它的初始条件所决定的。现在設方程在 $(x^0, u^0)$ 处是正常的，我們就在 $(x^0, u^0)$ 的邻域来考虑問題。不失一般性可以假設 $A_1(x, u) \neq 0$，若 $u=u(x)$ 是 (5.2) 的解，而令 $u(x_1^0, x_2, \cdots, x_n)=\beta(x_2, \cdots, x_n)$，則在 $x=x^0$ 适当的邻域，由初始条件

$$x_1=x_1^0 \text{ 时}, \quad u=\beta(x_2, x_3, \cdots, x_n) \tag{7.16}$$

所决定的解是唯一的。其次，方程 (7.15) 在 $(x_1^0, u^0)$ 适当的邻域，滿足初始条件

$$x=x_1^0 \text{ 时}, \quad f=u-\beta(x_2, \cdots, x_n)$$

的解也是唯一的，并且因为 $f_u(x^0, u^0)=1 \neq 0$，所以利用这个解 $f(x, u)$ 所定义的方程 $f(x, u)=0$，可以决定隐函数 $u=u(x)$，而它是方程 (5.2) 的解，并且滿足初始条件 (7.16)。因此方程 (5.2) 在正常点 $(x^0, u^0)$ 邻域的所有的解都可以用上面的方法求得。

**例 1** $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \partial_\nu u = ku$.

它的齐次方程是

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \partial_{x_\nu} f + ku\partial_u f = 0.$$

并且 $f_1=x_1^{-k}u, f_2=x_1^{-1}x_2, \cdots, f_n=x_1^{-1}x_n$ 都是方程的解。此外容易驗証，当 $x_1 \neq 0$ 时，$f_1, \cdots, f_n$ 滿足条件 (7.10)，因此齐次方程的一般解是

$$f=g(u/x_1^k, x_2/x_1, \cdots, x_n/x_1) \quad (g \text{ 任意函数}).$$

在这里可从 $f=c$ 解出 $u$，得到

$$u=x_1^k\phi(x_2/x_1, \cdots, x_n/x_1) \quad (\phi \text{ 任意函数}).$$

**例 2** $(cy-bu)u_x+(au-cx)u_y=bx-ay$.

它的齐次方程是

$$(cy-bu)f_x+(au-cx)f_y+(bx-ay)f_u=0,$$

齐次方程所属的特征方程是

$$\frac{dx}{cy-bu}=\frac{dy}{au-cx}=\frac{du}{bx-ay}.$$

容易証明 $f_1=x^2+y^2+u^2,\ f_2=ax+by+cu$

是常微分方程組的积分，此外在 $x:y:u=a:b:c$ 不成立的情形下，

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_u f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_u f_2\end{pmatrix}=2,$$

于是原方程的一般解可以由关系式

$$\phi(x^2+y^2+u^2,\ ax+by+cu)=0 \quad (\phi\ \text{任意的})$$

得出。

**习题 1** 求下列各偏微分方程的一般解。

(a) $xu_x+yu_y=u^2$.

(b) $xu_x-yu_y=x^2+y^2$.

(c) $(y+u)u_x+(x+u)u_y=x+y$.

(d) $\tan x\cdot u_x+\tan y\cdot u_y=\tan u$.

(e) $(e^x+u)u_x+(e^y+u)u_y=u^2-e^{x+y}$.

**习题 2** 証明：半綫性方程

$$\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x)\partial_\nu u=F(x,\ u)$$

的一般解(在方程的正常点处)可以表示为

$$u=G(x,\ \phi(H_1(x),\ \cdots,\ H_{n-1}(x))),$$

其中 $\phi$ 是任意函数，并且

$$\mathrm{Rk}\left(\partial_\nu H_\mu(x)\quad {}^{\mu=1,\cdots,n-1}_{\nu=1,\cdots,n}\right)=n-1.$$

## §8 主部相等的联立拟綫性微分方程組

含有二个以上未知函数的联立拟綫性(或是綫性)偏微分方程組的理論，一般地說，是非常深的，但是象下面这种形式的联立方程組

$$\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x,\ u)\partial_\nu u_i=F_i(x,\ u)\quad (i=1,\cdots,l), \qquad (8.1)$$

其中未知函数是 $u=(u_1, \cdots, u_l)$，可以象单独一个拟綫性方程那样地来討論。这样的联立方程組叫做**主部相等**的联立拟綫性偏微分方程組。这里每个方程的主部分别是一个未知函数的偏导数的一次齐式，并且齐式的系数函数与各个方程无关，恒具有同一的形式。

对于方程組(8.1)，与 $x$ 及 $u$ 有关的联立常微分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_\nu&=A_\nu(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_l) \quad (\nu=1, \cdots, n)\\ \frac{d}{dt}u_i&=F_i(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_l) \quad (i=1, \cdots, l)\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

叫做特征方程組。它的解 $(x, u)=\{x, u\}(t)$ 是在空間 $E^{n+l}$ 的某一部分内的曲綫（$t$ 是参变数），叫做(8.1)的特征曲綫。特征曲綫到 $x$ 空間 $E^n$ 的正射影 $x=x(t)$ 叫做基础特征曲綫。和 §5.6 中的討論完全一样，能够得到下面的两个定理。

**定理 8.1** 函数 $u=u(x)$ 是(8.1)的解的充分必要条件是，通过 $u=u(x)$ 的任意一点 $(x^0, u^0)$ $(u^0=u(x^0))$ 的特征曲綫 $(x, u)=\{x, u\}(t)$，一定落在曲面 $u=u(x)$ 上，卽 $u(t)=u(x)_{x=x(t)}$。

因此(8.1)的解是空間 $E^{n+l}$ 中由无穷多特征曲綫所組成的 $n$ 維的流形。

**定理 8.2** 設 $E^{n+l}$ 空間中有 $n-1$ 維的初始流形

$$\left.\begin{aligned}x_\nu&=\alpha_\nu(s_1, \cdots, s_{n-1}) \quad (\nu=1, \cdots, n),\\ u_i&=\beta_i(s_1, \cdots, s_{n-1}) \quad (i=1, \cdots, l),\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

并且成立着关系

$$\left|A_\nu(\alpha, \beta) \quad \partial_\mu\alpha_\nu\right|_{\mu=1, \cdots, n-1}^{\nu=1, \cdots, n} \neq 0. \tag{8.4}$$

設 $(x^0, u^0)$ 是(8.3)上的任意一点，則在 $x^0$ 适当的邻域，方程(8.1)存在着唯一的一組含有(8.3)的解（卽当 $x=\alpha(s)$ 时 $u=\beta(s)$）。

这些定理的証明方法和 §5.6 中的証法完全一样。

# 第3章　一般的单独一阶的偏微分方程

本章叙述一般单独的一阶偏微分方程(主要是非綫性的)的古典理論和解法。若是沒有特別說明，就假設討論中所有的函数在一个适当的区域中都是相当次数連續可微的实函数。实际上，常常只要假設二次連續可微就够了。

## §9　面　素　組

**1. 面素**　一般在討論(非綫性)一阶偏微分方程的时候，总設 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 为独立变数，$u=u(x)$ 为未知函数，并且为了书写上的便利，常把偏导函数 $\partial_\nu u$ 記作 $p_\nu$。这不仅因为可以用 $p_\nu$ 来代表 $\partial_\nu u$，而且因为在理論探討过程中，常常有这种必要把 $p_\nu$ 与 $x$ 及 $u$ 一并看成是独立变数。此外，为了便利起見，引入 $p$ 来代表 $n$ 个 $p_1, p_2, \cdots, p_n$。这些量的几何表現方法，是把 $2n+1$ 个实数組

$$(x^0, u^0, p^0)=(x_1^0, \cdots, x_n^0, u, p_1^0, \cdots, p_n^0)$$

看成是 $(x, u)$ 空間 $E^{n+1}$ 中的某一点 $(x^0, u^0)$，以及通过它的一个平面($n$ 維的)

$$u-u^0=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^0(x_\nu-x_\nu^0). \tag{9.1}$$

但是这个方程也可以解釋为以这一点作为切点的曲面的切平面。直观地来看，这表示曲面的无限小部分可以看成是一部分平面。所以在这种观点指导之下，我們与其說 $(x^0, u^0, p^0)$ 所表示的平面是一个无限延伸的平面，倒不如把平面(9.1)理解为含有点 $(x^0, u^0)$ 的无限小部分来得更好一些。因此我們把 $(x^0, u^0, p^0)$ 叫

做**面素**，也叫做**接触元素**。在面素$(x^0, u^0, p^0)$中，$(x^0, u^0)$ 叫做**点成分**，$p^0$ 叫做**方向成分**。

**2. 面素組** 现在假設对曲面（$n$ 維的）$u=u(x)$成立条件

$$u^0=u(x^0),\ p_\nu^0=\partial_\nu u(x^0)\quad(\nu=1,\ \cdots,\ n),$$

这时我們就說曲面 $u=u(x)$ 含有面素 $(x^0, u^0, p^0)$。于是，如果有两个曲面含有一个公共的面素 $(x^0, u^0, p^0)$，那就意味着这两个曲面在点$(x^0, u^0)$处相切。

下面我們考慮在$(x, u, p)$空間 $E^{2n+1}$ 中面素的 $r$ 維流形

$$(x,\ u,\ p)=\{X,\ U,\ P\}(s_1,\ \cdots,\ s_r),\tag{9.2}$$

其中$(s_1,\cdots,s_r)$是参变数。它們在$(x,u)$空間 $E^{n+1}$ 的点成分流形是

$$(x,\ u)=\{X,\ U\}(s),\quad s=(s_1,\ \cdots,\ s_r).\tag{9.3}$$

現在討論一下(9.3)与(9.2)中各面素的相切条件，就是說，对于任意的 $s=s^0$，求 $(x, u)=\{X, U\}(s^0)$ 与

$$u-U(s^0)=\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu(s^0)(x_\nu-X_\nu(s^0))\tag{9.4}$$

相切的条件。

为了这个目的，事实上只要得到(9.3)所包含的通过$\{X, U\}(s^0)$的任意曲綫与(9.4)相切的条件即可。这时，把 $s$（$r$ 个变数）看成是 $t$（1 个变数）的任意函数，并設

$$\{X,\ U\}(s(t))=\{\bar{x},\ \bar{u}\}(t).$$

由于对于任意的 $t=t^0$，$(s^0=s(t^0))$，曲綫$(x, u)=\{\bar{x},\bar{u}\}(t)$与(9.4)相切，所以有

$$\bar{u}'(t)=\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu(s(t))\bar{x}_\nu'(t),\tag{9.5}$$

即

$$\left\{\sum_{\rho=1}^{r}\partial_\rho U\cdot s_\rho'(t)\right\}_{s=s(t)}=\left\{\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu\sum_{\rho=1}^{r}\partial_\rho X_\nu\cdot s_\rho'(t)\right\}_{s=s(t)}.$$

因为这里的 $s_\rho(t)$ 是任意函数，所以比較等式两边关于 $s_\rho'$ 的系数，就有

$$\partial_\rho U = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \partial_\rho X_\nu \quad (\rho=1, \cdots, r). \tag{9.6}$$

为了把条件写成与参变数 $s$ 无关而又容易記忆的形式，我們分别在等式两边乘以 $ds_\rho$，并且把 $r$ 个方程相加，就得到了下面的全微分式

$$dU = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu dX_\nu. \tag{9.7}$$

(9.7)与(9.6)实际是等价的关系式（因为 $ds_\rho$ 是任意的）。反过来，由于(9.7)，等式(9.5)也成立。因此，(9.7)是(9.3)与(9.2)中各面素相切的充分必要条件。所以当(9.7)成立时，(9.2)叫做 $r$ 維的**面素組**。对于面素組(9.2)，它的点成分流形(9.3)叫做**支体**(也有人称为支台)。特别对于一維的面素組，它的支体是一維流形，即是曲綫，我們又叫做带，所以 $r$ 維的面素組也简单地叫做 $r$ 維带，这时就把(9.7)叫做**成带条件**。

另外，如果把参变数 $s$ 看成为其他参变数 $s'=(s'_1, \cdots, s'_{r'})$（可以认为 $r'\neq r$）的任意函数，我們来考虑(9.2)或是它的一个部分流形。由于 $s'$ 是独立变数，所以容易由(9.6)导出同样的公式

$$\partial'_\rho U = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \partial'_\rho X_\nu \quad (\rho=1, \cdots, r').$$

至于公式(9.7)，它具有与参数选擇无关的这一特点。

特别，对于一个 $n$ 維的面素組(9.2)，如果滿足条件

$$\frac{D(X_1, \cdots, X_n)}{D(s_1, \cdots, s_n)} \neq 0, \tag{9.8}$$

那么在局部的范圍内可以代替参数 $s$ 而取 $x(=X)$ 为独立变数。这个时候，条件(9.6)就成为

$$P_\nu = \partial_{x_\nu} U \quad (\nu=1, \cdots, n). \tag{9.9}$$

这样就得到了下面的定理。

**定理 9.1**　对 $n$ 維的面素組(9.2)($r=n$)，如果成立条件(9.8)，

则可以取 $x$ 为独立变数，而条件(9.9)成立。

此外，$r$ 維面素組的任意 $r'$ 維 $(r'\leqslant r)$ 的部分流形

$$(x, u, p)=\{X, U, P\}(s(s'_1, \cdots, s'_{r'}))$$

仍是面素組。

**注意 1** 若面素組(9.2)是 $r$ 維的，则有

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix}\partial_\rho X_\nu(s) & \partial_\rho U(s) & \partial_\rho P_\nu(s) & {}^{\rho=1,\cdots,r}_{\nu=1,\cdots,n}\end{pmatrix}=r.$$

对于 $r$ 維的面素組，它的支体的維数不能超过 $r$，但是可以小于 $r$. 在极端的情形，支体能够蜕化成为一个点(零維的)。这时，由于 $dX_\nu=0$, $dU=0$, 所以对于完全任意的 $P_\nu$, 成带条件 (9.7) 恒成立。于是有 $X_\nu(s)=a_\nu$ (常数)，$U(s)=b$ (常数)。如果取 $P_\nu(s)=s_\nu(\nu=1, \cdots, n)$, 它就成为 $n$ 維的面素組。

**注意 2** 若是成带条件被滿足的話，那么 $X_\nu(s)$, $U(s)$ 必須是全微分可能的函数，但是对 $P_\nu(s)$ 沒有假設微分可能的必要。因此，在定理 9.1 中假設 $X_\nu(s)$ 及 $U(s)$ 一次連續可微而 $P_\nu(s)$ 只要連續卽可。

但是在面素組的維数定义(注意 1)中用到了 $P_\nu(s)$ 的微分可能性。所以这时仅当支体的維数恰好是 $r$，卽

$$\mathrm{Rk}(\partial_\rho X_\nu(s) \quad \partial_\rho U(s))=r \quad (\text{参变数的个数})$$

时(这时卽使 $P_\nu(s)$ 不可微)，才可以認为(9.2)是 $r$ 維的。当支体的維数比这个数小时，这个問題的討論将是非常困难的。

**习題** 对于 $(x, y, u)$ 空間 $E^3$ 中的一条曲綫 $(x, y, u)=\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\}(t)$, 設 $(\bar{x}'(t), \bar{y}'(t))\neq(0, 0)$, 求以这条曲綫为支体的二維面素組。現在假設 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}\}(t)$ 二次連續可微。

## §10 一阶偏微分方程，正常解，奇异解

設 $F(x, u, p)$ 是关于 $2n+1$ 个变数 $(x, u, p)=(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ 的已知函数，则方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u)=0 \tag{10.1}$$

叫做关于未知函数 $u=u(x)$ 的一般一阶偏微分方程。使(10.1)恒等地成立的函数 $u=u(x)$ 叫做(10.1)的解。由定理 9.1 就能得到下面的定理。

**定理 10.1**　(10.1)的解是满足方程

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,p_1,\cdots,p_n)=0 \tag{10.2}$$

的 $n$ 維面素組 (9.2) $(r=n)$ 的支体所成的($n$ 維)曲面 $u=u(x)$，并且这部分支体还要满足条件(9.8)。

如果对面素 $(x^0, u^0, p^0)$ 满足条件

$$\{F_{p_1},\cdots,F_{p_n}\}(x^0,u^0,p^0)\neq\{0,\cdots,0\}, \tag{10.3}$$

那么就說 $F$ 在 $(x^0, u^0, p^0)$ 处是**正常的**，并且叫 $(x^0, u^0, p^0)$ 为 $F$ 的正常面素。若 $(x^0, u^0, p^0)$ 是满足 (10.2) 的正常面素，則在 $(x^0, u^0, p^0)$ 的邻域[在 $(x, u, p)$ 空間 $E^{2n+1}$]，根据方程(10.2)，可以把 $p_\nu$ 中的某一个表成其余 $2n$ 个变数 ($x$, $u$ 以及另外 $n-1$ 个 $p_\nu$) 的函数，譬如当

$$F(x^0,u^0,p^0)=0,\ F_{p_1}(x^0,u^0,p^0)\neq 0$$

时，在 $(x^0, u^0, p^0)$ 的邻域利用(10.2)可以解出 $p_1$，而得到与(10.2)等价的方程

$$p_1=f(x_1,\cdots,x_n,u,p_2,\cdots,p_n), \tag{10.4}$$

这样就得到了一个与(10.1)等价的偏微分方程

$$\partial_1 u=f(x_1,\cdots,x_n,u,\partial_2 u,\cdots,\partial_n u). \tag{10.5}$$

与(10.1)对照，这种方程叫做“基准型”的偏微分方程。

若 $(x^0, u^0, p^0)$ 不是 $F$ 的正常面素，即

$$\{F_{p_1},\cdots,F_{p_n}\}(x^0,u^0,p^0)=(0,\cdots,0), \tag{10.6}$$

这时，$(x^0, u^0, p^0)$ 叫做 $F$ 的**奇异面素**。$F$ 的只含有正常面素的解叫做(10.1)的**正常解**，只含有奇异面素的解叫做**奇异解**。因此，对(10.1)的奇异解 $u=u(x)$，若設

$$u=u(x),\ p_\nu=\partial_\nu u(x)\quad(\nu=1,\cdots,n),$$

則它們恒等地满足 $n+1$ 个方程

$$F(x,u,p)=0,\ F_{p_\nu}(x,u,p)=0\quad(\nu=1,\cdots,n). \tag{10.7}$$

若 $u=u(x)$ 是奇异解，令 $(u, p)=\{u, u_x\}(x)$，把(10.7)中的

第一个方程对 $x_\mu$ 微分，则得

$$F_{x_\mu}+F_u p_\mu+\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}\partial_\mu p_\nu=0,\ [(u,\ p)=\{u,\ u_x\}(x)].$$

因此由(10.7)后面的 $n$ 个方程，就有

$$F_{x_\mu}+F_u p_\mu=0\ \ (\mu=1,\ \cdots,\ n),\ [(u,\ p)=\{u,\ u_x\}(x)].\quad(10.8)$$

这就表示着，奇异解非满足 (10.7) 及 (10.8) 这 $2n+1$ 个方程不可。反过来，如果存在同时满足(10.7) 及 (10.8)的 $n+1$ 个函数 $(u,\ p)=\{u,\ p\}(x)$[这里不需要把 $p(x)$ 认为是 $u(x)$ 的导函数]，先把(10.7)中最初的式子对 $x_\mu$ 微分，则有

$$F_{x_\mu}+F_u\partial_\mu u+\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}\partial_\mu p_\nu=0,\ [(u,\ p)=\{u,\ p\}(x)].$$

因此根据这个式子，以及(10.7)后面的 $n$ 个式子，在(10.8)内代入 $(u,\ p)=\{u,\ p\}(x)$ 后，就得到

$$(F_u)_{(u,p)=(u,p)(x)}(\partial_\mu u-p_\mu)=0.$$

假設再有"$F_u\neq 0$"，則得 $p_\mu(x)=\partial_\mu u(x)$，即 $u=u(x)$ 是方程(10.1)的奇异解。

如果奇异解存在的話，那么这 $n+1$ 个函数 $u,\ p_1,\ \cdots,\ p_n$ 非一齐满足(10.7)及(10.8)中的 $2n+1$ 个方程不可，因此，除了特殊的情形以外，一般地說，奇异解并不存在。

**例 1** $F=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu^2-u=0\quad(p_\nu=\partial_\nu u)$.

滿足(10.7)的 $u$ 与 $p$ 是 $u=0$, $p_\nu=0$，故奇异解仅能是 $u\equiv 0$.

**例 2** $F=\sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu-x_\nu)^2-u=0\quad(p_\nu=\partial_\nu u)$.

由(10.7)及(10.8)有 $x_\nu=0$, $p_\nu=0$, $u=0$. 因为 $x$ 是独立变数，所以条件不可能成立，故奇异解不存在。

**注意** 若 $F$ 是 $p$ 的一次齐式(即拟綫性方程的情形)，这时，面素$(x^0,\ u^0,\ p^0)$是正常的条件与点$(x^0,\ u^0)$是正常的条件完全一致，而与 $p^0$ 的值无关。

若是一个面素对于两个等价的方程之一是正常的，但是对于另一方程是奇异的，那么我們就常常取面素为正常的那一方程来討論。

## §11 特　征　带

**1. 特征带**　令 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$p=(p_1, \cdots, p_n)$，而考虑偏微分方程

$$F(x, u, p)=0 \quad (p_\nu=\partial_\nu u). \tag{11.1}$$

若是这个方程存在着解，将方程(11.1)对 $x_\nu$ 微分，有

$$F_{x_\nu}+F_u\partial_\nu u+\sum_{\mu=1}^{n} F_{p_\mu}\partial_\nu p_\mu=0, \ [(u, p)=\{u, p\}(x)].$$

由于 $\partial_\nu u=p_\nu$，而有 $\partial_\nu p_\mu=\partial_{\nu\mu}^2 u=\partial_\mu p_\nu$，所以上式可以写成

$$\sum_{\mu=1}^{n} F_{p_\mu}\partial_\mu p_\nu=-F_{x_\nu}-F_u p_\nu \quad [(u, p)=\{u, p\}(x)]$$

$$(\nu=1, \cdots, n). \tag{11.2}$$

又因为 $\partial_\mu u=p_\mu$，所以有

$$\sum_{\mu=1}^{n} F_{p_\mu}\partial_\mu u=\sum_{\mu=1}^{n} F_{p_\mu}p_\mu \quad [(u, p)=\{u, p\}(x)]. \tag{11.3}$$

因此，对方程(11.1)的解 $u=u(x)$ 所含有的面素 $(x, u, p)$，如以 $u, p$ 为未知函数，则它們满足一組主部相等的拟綫性偏微分方程組(11.2)及(11.3)。这組方程的特征方程組是

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x_\nu=F_{p_\nu} \quad (\nu=1, \cdots, n),\\
&\frac{d}{dt}u=\sum_{\mu=1}^{n} F_{p_\mu}p_\mu,\\
&\frac{d}{dt}p_\nu=-F_{x_\nu}-F_u p_\nu \quad (\nu=1, \cdots, n).
\end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

方程組(11.4)又叫做偏微分方程(11.1)的**特征方程組**。(11.4)的解 $(x, u, p)=\{x, u, p\}(t)$ 构成一維的面素組(带)。由(11.4)很容易証明

$$\frac{d}{dt}u-\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\frac{d}{dt}x_\nu=0.$$

由(11.4)的解所构成的带叫做方程(11.1)的**特征带**。它的支

体$(x, u)=\{x, u\}(t)$(曲綫)叫做方程(11.1)的**特征曲綫**。

其次，$F(x, u, p)$是常微分方程組 (11.4) 的积分。实际上，取$(x, u, p)=\{x, u, p\}(t)$代入$F(x, u, p)$，并作微分，就有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F&=\sum_{\nu=1}^{n}F_{x_\nu}\frac{dx_\nu}{dt}+F_u\frac{du}{dt}+\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}\frac{dp_\nu}{dt}\\&=\sum_{\nu=1}^{n}F_{x_\nu}F_{p_\nu}+F_u\sum_{\mu=1}^{n}F_{p_\mu}p_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}(F_{x_\nu}+F_u p_\nu)\\&=0.\end{aligned}$$

对联立方程組(11.2) 及 (11.3)应用定理 8.1，就能够得到这样的結論：若是方程(11.1)的解$u=u(x)$含有面素$(x^0, u^0, p^0)$，那么它就含有包含$(x^0, u^0, p^0)$的特征带$(x, u, p)=\{x, u, p\}(t)$。于是就証明了下面的定理。

**定理 11.1** 方程(11.4)对于$F$是正常的解$(x, u, p)=\{x, u, p\}(t)$組成带。其次，$F(x, u, p)$是(11.4)的积分。又若(11.1)的解$u=u(x)$含有面素$(x^0, u^0, p^0)$，則$u=u(x)$就含有包含$(x^0, u^0, p^0)$的特征带。

**推論** 如果(11.1)的两个解所表示的曲面在一点相切，則这两个曲面沿着通过切点的整条特征带相切(即有公共的特征带)。

如果方程(11.1)是拟綫性方程($F$是$p$的一次齐式)，即

$$F\equiv\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x, u)p_\nu-B(x, u)=0,$$

則$F_{p_\nu}=A_\nu(x, u)$，并且由$F=0$，有

$$\sum_{\nu=1}^{n}F_{p_\nu}p_\nu=B(x, u).$$

于是方程組(11.4)中前$n+1$个方程是

$$\frac{d}{dt}x_\nu=A_\nu(x, u)\quad(\nu=1, \cdots, n),\quad \frac{d}{dt}u=B(x, u).$$

这恰好与拟綫性方程$F=0$的特征方程完全一致。

**注意**　上面的討論，当 $F(x, u, p)$ 与 $u(x)$ 都是二次連續可微时就能成立。

**例 1**　如果 $F$ 是仅含有 $p$ 的函数，即

$$F(p_1, \cdots, p_n)=0 \quad (p_\nu=\partial_\nu u),$$

它的特征方程是

$$\frac{d}{dt}x_\nu=F_{p_\nu}(p), \quad \frac{d}{dt}u=\sum_{\mu=1}^{n}p_\mu F_{p_\mu}(p), \quad \frac{d}{dt}p_\nu=0$$
$$(\nu=1, \cdots, n).$$

由后面的 $n$ 个式子，就得到了 $p_i=c_i$（常数），于是

$$x_\nu=F_{p_\nu}(c)t+a_\nu \quad (\nu=1, \cdots, n),$$

$$u=\sum_{\mu=1}^{n}c_\mu F_{p_\mu}(c)t+b \quad (a_\nu,\ b \text{ 常数}).$$

即特征曲綫是直綫，并且特征带的方向成分不变 $(p=c)$。这就是說：对于 $F=0$ 的解的曲面 $u=u(x)$，通过它的每个点有一条直綫（特征曲綫），沿着这条直綫曲面与某一个平面（$n$ 維的）相切。因此曲面是这些平面所成的平面族的包絡面。

**2. 特征带的几何意义**　我們考虑 $n=2$ 的情形，并且代替 $x_1$, $x_2$, $p_1$, $p_2$，使用写法 $x, y, p, q$。对于 $(x, y, u)$ 空間 $E^3$ 中的一点 $(x^0, y^0, u^0)$，以及滿足方程

$$F(x^0, y^0, u^0, p, q)=0 \tag{11.5}$$

的面素 $(x^0, y^0, u^0, p, q)$，現在研究一下平面

$$u-u^0=p(x-x^0)+q(y-y^0) \tag{11.6}$$

的性質。

由于滿足(11.5)的 $(p, q)$ 只能有一个自由度[并設 $(F_p, F_q)\neq(0, 0)$]，所以由它們所决定的平面族(11.6)包絡了一个以 $(x^0, y^0, u^0)$ 为頂点的錐面。現在我們先求这个錐面的方程。由于 $p, q$ 只有一个自由度，所以可假設

$$(p, q)=\{p, q\}(\lambda) \quad (\lambda \text{ 是参变数}), \tag{11.7}$$

并且要滿足(11.5)。对于这(11.7)，方程(11.6)所形成的包絡面自然是由无限相近的两个 $\lambda$ 值代入 (11.6) 后 [即把 (11.7) 代入

(11.6)]，这两个平面的交綫 $l_\lambda$ 所生成的曲面。而 $l_\lambda$ 是将(11.6)[把(11.7)代入后]对 $\lambda$ 作微分，即

$$0=p'(\lambda)(x-x^0)+q'(\lambda)(y-y^0) \tag{11.8}$$

与方程(11.6)[把(11.7)代入后]所决定的直綫。这些直綫 $l_\lambda$ 的集合所生成的曲面就是(11.6)[把(11.7)代入后]的包絡面。

但是由(11.5)[把(11.7)代入后]有

$$(F_p)_0 p'(\lambda)+(F_q)_0 q'(\lambda)=0, \tag{11.9}$$

$(\ )_0$ 的意义是取 $(x, y, u, p, q)=(x^0, y^0, u^0, p(\lambda), q(\lambda))$.

假設 $(p'(\lambda), q'(\lambda))\neq(0, 0)$，由(11.8)及(11.9)就有

$$\begin{vmatrix} x-x^0 & y-y^0 \\ (F_p)_0 & (F_q)_0 \end{vmatrix}=0.$$

因此如以 $t$ 为参变数，則直綫 $l_\lambda$ 的方程是

$$\left.\begin{aligned} &x=x^0+t(F_p)_0,\quad y=y^0+t(F_q)_0, \\ &u=u^0+t(pF_p+qF_q)_0. \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

如果以 $t$ 及 $\lambda$ 两个变数作为参变数，則(11.10)就是所求的包絡面的方程，它是由通过 $(x^0, y^0, u^0)$ 的直綫 $l_\lambda$ 所生成的。这个錐面叫做 **Monge 錐面**。对于满足(11.5)的面素，平面(11.6)沿着 $l_\lambda$ 与 Monge 錐面相切。故方程(11.1)的解 $u=u(x, y)$，在它上的任一点 $(x^0, y^0, u^0)$ 与这点所属的 Monge 錐面相切。

如果以 $dt$ 代替 $t$，則可以用 $dx$, $dy$, $du$ 来代替 $x-x^0$, $y-y^0$, $u-u^0$，于是由(11.10)就得到微分方程組

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{du}{pF_p+qF_q}=dt. \tag{11.11}$$

现在向量 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}\right)$ 的方向与 Monge 錐面的母綫 $l_\lambda$ 的方向一致。并且容易看出，满足 $F=0$ 及方程組(11.11)的 $(x, y, u, p, q)=\{x, y, u, p, q\}(t)$ 构成带。这种带叫做 **Monge 带**，它的支体 $(x, y, u)=\{x, y, u\}(t)$ 叫做 **Monge 曲綫**。如果 $F$ 是 $p$,

$q$ 的一次齐式，则 Monge 曲綫就与特征曲綫一致。

此外，若是 Monge 带 $(x, y, u, p, q)=\{x, y, u, p, q\}(t)$ 包含在偏微分方程

$$F(x, y, u, p, q)=0 \quad (p=u_x,\ q=u_y) \tag{11.12}$$

的解 $u=u(x, y)$ 内，则因 $u=u(x, y)$ 所包含的面素全体，作为 $x, y$ 的函数，应該滿足下列方程組[見(11.2), (11.3)]

$$\left.\begin{aligned} F_p p_x+F_q p_y&=-F_x-F_u p,\\ F_p q_x+F_q q_y&=-F_y-F_u q. \end{aligned}\right\} \tag{11.13}$$

所以由(11.11)及(11.13)，就得到

$$\frac{dp}{dt}=-F_x-F_u p, \quad \frac{dq}{dt}=-F_y-F_u q. \tag{11.14}$$

这就是說：包含于方程(11.2)的解内的 Monge 带是特征带。

一般地，令 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$p=(p_1, \cdots, p_n)$，則滿足 $F=0$ 以及

$$\frac{d}{dt}x_\nu=F_{p_\nu} \quad (\nu=1, \cdots, n), \quad \frac{d}{dt}u=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu F_{p_\nu}$$

的面素 $(x, u, p)=\{x, u, p\}(t)$ 构成带，这种带就叫做 Monge 带，它的支体叫做 Monge 曲綫。

方程(11.1)的解所含有的 Monge 带就是特征带。

**例2** $F=p^2+q^2-1=0$.

設 $(x, y, u, p, q)=(\cos 2t, \sin 2t, 2t, -\sin 2t, \cos 2t)$，容易驗証这是 Monge 带。但是对这个方程的特征带来說，$p$ 与 $q$ 都是定数，即 $(x, y, u)$ 非形成直綫不可。

## §12　Cauchy 存在定理

**1. 初始面素組**　令 $x=(x_1, \cdots, x_n)$. 对 $u=u(x)$，$(x, u, p)=\{x, u, u_x\}(x)$ 形成一个 $n$ 維的面素組，如果把这里的独立变数 $x$ 限制在一个 $r$ 維流形上变动，即

$$x_\nu=\alpha_\nu(s) \quad (\nu=1, \cdots, n), \quad s=(s_1, \cdots, s_r),$$

并令 $\{x, u, u_x\}(\alpha(s))=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$，則 $(x, u, p)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 就形成一个 $r$ 維的面素組(它的支体也是 $r$ 維的)。(見定理 8.1)

現在假設已給一个 $n-1$ 維的面素組(支体也是 $n-1$ 維的)，即

$$(x, u, p)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s_1, \cdots, s_{n-1}) \tag{12.1}$$

試求方程(11.1)包含这一个面素組的解 $u=u(x)$。这个問題叫做 **Cauchy 問題**，这时，面素組(12.1)叫做**初始面素組**。

至于問題的初始条件，由于初始面素組的关系，首先自然地可以附加以初始值

$$x=\alpha(s_1, \cdots, s_{n-1}) \text{ 时}, \ u=\beta(s_1, \cdots, s_{n-1}).$$

这个时候，以 $(x, u)=\{\alpha, \beta\}(s)$ 为支体的面素組(12.1)，应該認为是滿足方程(11.1)的，即滿足(11.1)以及成带条件

$$F(\alpha(s), \beta(s), p)=0, \ \partial_\mu\beta(s)=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\partial_\mu\alpha_\nu(s)$$
$$(\mu=1, \cdots, n-1). \tag{12.2}$$

这样决定了 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 之后，就可以認为 $p=\gamma(s)$。即如果存在着一个面素 $(x, u, p)=(\alpha^0, \beta^0, p^0)$，$(\alpha^0, \beta^0)=\{\alpha, \beta\}(s^0)$，使得

$$\left| F_{p_\nu}(\alpha^0, \beta^0, p^0) \ \ \partial_\mu\alpha_\nu(s^0) \quad {}^{\nu=1,\cdots,n}_{\mu=1,\cdots,n-1} \right| \neq 0 \tag{12.3}$$

成立，則在 $s=s^0$ 的邻域，就可以由(12.2)把 $p$ 决定成为 $s$ 的函数。

如果設 $\alpha_1(s)\equiv x_1^0$，$\alpha_\nu(s)\equiv s_{\nu-1}$ $(\nu=2, \cdots, n)$，則条件(12.3)与 $F_{p_1}(\alpha^0, \beta^0, p^0)\neq 0$ 一致。这时，在 $(x, u, p)=(\alpha^0, \beta^0, p^0)$ 的邻域方程(11.1)可以化成它的等价式

$$p_1=f(x, u, p_2, \cdots, p_n),$$

而初始条件就成为

$$\text{当 } x_1=x_1^0 \text{ 时}, \ u=\beta(x_2, \cdots, x_n).$$

并且由(12.2)还有

$$p_\nu=\partial_\nu\beta(x_2,\cdots,x_n)=\gamma_\nu \quad (\nu=2,\cdots,n),$$

$$p_1=f(x_1^0,x_2,\cdots,x_n,\beta,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=\gamma_1.$$

此外，由定理 11.1，如果方程 (11.1) 的解 $u=u(x)$ 含有初始面素組(12.1)，則曲面 $u=u(x)$ 就包含着包含(12.1) 中各面素的特征带 $(x,u,p)=\{x,u,p\}(t,s)$。故方程 (11.1) 的解 $u=u(x)$ 一定是包含 (12.1) 的特征带 $(x,u,p)=\{x,u,p\}(t,s)$ 的面素所构成的 $n$ 維曲面。

## 2. Cauchy 存在定理

**定理 12.1** 設对于初始面素組(12.1)成立着条件

$$F(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s))=0 \tag{12.4}$$

以及

$$\left|F_{p_\nu}(\alpha,\beta,\gamma) \quad \partial_\mu\alpha_\nu \quad {}^{\nu\downarrow 1,\cdots,n}_{\mu\to 1,\cdots,n-1}\right|\neq 0. \tag{12.5}$$

再設(12.1)的任意一个面素为 $(x^0,u^0,p^0)=\{\alpha,\beta,\gamma\}(s^0)$，則在 $x=x^0$ 的邻域，方程 (11.1) 存在着唯一的包含 (12.1) 的解 $u=u(x)$（二次連續可微）。

**証明** 設含有(12.1)中各面素的特征带，即(11.4) 中当 $t=0$ 时，$(x,u,p)=\{\alpha,\beta,\gamma\}(s)$ 的解，取为

$$(x,u,p)=\{X,U,P\}(t,s). \tag{12.6}$$

因为 $F(x,u,p)$ 是(11.4)的积分，所以由(12.4)有

$$F(X,U,P)=F(\alpha,\beta,\gamma)=0. \tag{12.7}$$

又 $x=X$ 是(11.4)的解，所以由(12.5)有

$$\frac{D(X_1,\cdots,X_n)}{D(t,s_1,\cdots,s_{n-1})_{t=0}}=\left|F_{p_\nu}(\alpha,\beta,\gamma) \quad \partial_\mu\alpha_\nu \quad {}^{\nu\downarrow 1,\cdots,n}_{\mu\to 1,\cdots,n-1}\right|\neq 0. \tag{12.8}$$

所以 $x_\nu=X_\nu(t,s_1,\cdots,s_{n-1}) \quad (\nu=1,2,\cdots,n)$，

这样，就使得 $x=x^0$ 的邻域与 $(t,s)=(0,s^0)$ 的邻域成一对一的对

应，从而可以得到 $t$, $s$ 是 $x$ 的函数：$(t, s)=\{t, s\}(x)$。于是令

$$U(t(x), s(x))=u(x), \quad P_\nu(t(x), s(x))=p_\nu(x),$$

由于 $X_\nu(t(x), s(x))=x_\nu$，所以从(12.7)就得到

$$F(x, u(x), p(x))=0. \tag{12.9}$$

所余下的問題是要証明 $p_\nu(x)=\partial_\nu u(x)$。要达到这个目的，只要利用(12.8)及定理 9.1 来証明方程(12.6)所决定的是 $n$ 維的面素組即可。

首先設 $s$ 是固定的，由于(12.6)是带，所以有

$$\partial_t U-\sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_t X_\nu=0. \tag{12.10}$$

如果另外还成立

$$\partial_\mu U-\sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_\mu X_\nu=0 \quad (\mu=1, \cdots, n-1)$$

($\partial_\mu$ 表示对 $s_\mu$ 的偏微分)，那么把 $(t, s)$ 看作独立变数，(9.7)的面素組条件就成立。现在令

$$w_\mu=\partial_\mu U-\sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_\mu X_\nu, \tag{12.11}$$

于是只要証明 $w_\mu=0$ 即可。

因为当 $t=0$ 时，$(X, U, P)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 是面素組，所以 $(w_\mu)_{t=0}=0$。

现在把(12.11)对 $t$ 微分，则有

$$\partial_t w_\mu=\partial_{t,\mu}^2 U-\sum_{\nu=1}^n \partial_t P_\nu \partial_\mu X_\nu-\sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_{t,\mu}^2 X_\nu. \tag{12.12}$$

另外把(12.10)对 $s_\mu$ 微分，则有

$$0=\partial_{t,\mu}^2 U-\sum_{\nu=1}^n \partial_\mu P_\nu \partial_t X_\nu-\sum_{\nu=1}^n P_\nu \partial_{t,\mu}^2 X_\nu.$$

由(12.12)减去上式，则得

$$\partial_t w_\mu=\sum_{\nu=1}^n (\partial_\mu P_\nu \partial_t X_\nu-\partial_t P_\nu \partial_\mu X_\nu).$$

因为(12.6)是(11.4)的解，所以由

$$\partial_t X_\nu = (F_{p_\nu})_{(X,U,P)}, \qquad \partial_t P_\nu = -(F_{x_\nu} + F_u p_\nu)_{(X,U,P)},$$

就有

$$\partial_t w_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \{F_{p_\nu} \partial_\mu p_\nu + (F_{x_\nu} + F_u P_\nu) \partial_\mu X_\nu\}_{(X,U,P)}. \qquad (12.13)$$

另外把(12.7)对 $s_\mu$ 微分，则有

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} F_{x_\nu} \partial_\mu X_\nu + F_u \partial_\mu U + \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \partial_\mu P_\nu\right)_{(X,U,P)} = 0.$$

从(12.13)式的右边减去此式，则有

$$\partial_t w_\mu = (F_u)_{(X,U,P)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \partial_\mu X_\nu - \partial_\mu U\right) = -(F_u)_{(X,U,P)} w_\mu$$

[据(12.11)]。于是得到

$$w_\mu = (w_\mu)_{t=0} \exp\left(-\int_0^t (F_u)_{(X,U,P)} dt\right).$$

但是已經說过 $(w_\mu)_{t=0} = 0$，所以 $w_\mu = 0$，因此(12.6)确是 $n$ 維的面素組，即 $u = u(x)$ 是方程(11.1)的解。

但是在 $x = x^0$ 的邻域，$t = 0$ 与 $x = \alpha(s)$ 的意义相等，因此 $u = u(x)$ 含有(12.1)。此外，方程(11.1)的所有含(12.1)的解都可以用上面的方法求得。 証毕

**例 1** 解方程 $F = p_1^2 + p_2^2 - 1 = 0$，初始条件是

$(x_1, x_2) = (\cos s, \sin s)$ 时，$u = cs$ （$c$ 常数）。

由于 $p_1^2 + p_2^2 = 1$，所以取 $(p_1, p_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$ 而討論一下初始面素組的条件。因为 $\beta'(s) = p_1\alpha_1' + p_2\alpha_2'$，所以

$$c = \sin(\theta - s), \text{ 从而 } \theta = s + \theta_0 \quad (\sin\theta_0 = c).$$

于是初始带是

$$(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = \{\cos s, \sin s, cs, \cos(s+\theta_0), \sin(s+\theta_0)\},$$

而特征方程是

$$\frac{dx_1}{dt} = 2p_1, \frac{dx_2}{dt} = 2p_2, \quad \frac{du}{dt} = 2p_1^2 + 2p_2^2 = 2, \frac{dp_\nu}{dt} = 0.$$

因此

$$(p_1, p_2) = \{\cos(s+\theta_0), \sin(s+\theta_0)\},$$

$$(x_1, x_2)=\{\cos s+2t\cos(s+\theta_0),\ \sin s+2t\sin(s+\theta_0)\},$$

$$u=\sin\theta_0\cdot s+2t \quad (s,\ t\ 是参变数)。$$

現在能用第二个式子把 $t$, $\cos s$, $\sin s$ 解成 $x_1$, $x_2$ 的具体的函数，然后代入第三式，就得到 $u$, $u$ 是 $x_1$, $x_2$ 的初等函数。

**习題 1** 在上面的例題中，就 $c$ 的值討論一下定理 12.1 中条件(12.4)及(12.5)成立与否的情形。

**例 2** 解方程 $F=p_1p_2-u=0$，初始条件是 $x_1=0$, $u=x_2^2$.

(12.1) 中的流形是 $(x_1, x_2, u, p_1, p_2)=(0, s, s^2, s/2, 2s)$，特征方程是

$$\frac{dx_1}{p_2}=\frac{dx_2}{p_1}=\frac{du}{2p_1p_2}=\frac{dp_1}{p_1}=\frac{dp_2}{p_2}=dt.$$

由这里就有

$$(p_1, p_2)=\left(\frac{1}{2}se^t,\ 2se^t\right),$$

$$(x_1, x_2)=\left(2s(e^t-1),\ \frac{1}{2}s(e^t-1)+s\right),$$

$$u=s^2e^{2t}.$$

把 $s$, $e^t$ 解出成为 $x_1$, $x_2$ 的函数，代入最后一式，就得到

$$u=(x_2+x_1/4)^2.$$

**注意 1** 为了使定理 12.1 成立，只要設 $F(x, u, p)$ 二次連續可微，$\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 一次連續可微即可。若 $F(x,u,p)$ 是 $k$ 次，而 $\{\alpha,\beta,\gamma\}(s)$ 是 $k-1$ 次連續可微，$(k\geqslant 2)$，則解 $u=u(x)$ 也必定 $k$ 次連續可微。此外，如果要求由(12.2)所决定的 $p=\gamma(s)$ 是 $k-1$ 次連續可微，那么只要假設 $\alpha(s)$, $\beta(s)$ $k$ 次連續可微就够了。再者，如果 $F(x, u, p)$ 以及 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 解析正則，則解 $u=u(x)$ 也是解析正則的。

**注意 2** 如果定理 12.1 中的条件(12.5)对初始面素組 (12.1) 上一切的点都不成立的話，这种(12.1)叫做**拟特征**的。为了容易理解，我們討論一下 $n=2$ 的情形。这时，(12.1)是拟特征的条件为

$$\begin{vmatrix} F_{p_1}(\alpha, \beta, \gamma) & \alpha_1'(s) \\ F_{p_2}(\alpha, \beta, \gamma) & \alpha_2'(s) \end{vmatrix}=0.$$

若是对这个(12.1)，$F$ 是正常的，那么一定存在着 $\lambda(s)$，使得

$$\alpha_\nu'(s)=\lambda(s)F_{p_\nu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\nu=1, 2).$$

又由成带条件可以得到

$$\beta'(s)=\sum_{\nu=1}^{2}\gamma_\nu(s)\alpha'_\nu(s)=\lambda(s)\left(\sum_{\nu=1}^{2}p_\nu F_{p_\nu}\right)_{(x,u,p)=(\alpha,\beta,\gamma)}.$$

因此，初始带$(x_1, u_1, p)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$满足微分方程組

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\frac{dx_2}{F_{p_2}}=\frac{du}{p_1F_{p_1}+p_2F_{p_2}}=\lambda(s)ds.$$

这个带是 Monge 带，因此，如果以这个带作为初始带的、(11.1)包含这个带的解存在的話，那么这个初始带就一定是特征带。

事实上，在定理 12.1 的証明中，在驗証(12.6)是 $n$ 維面素組时，并沒有用到条件(12.5)。因此，如果当 $t>0$(或是 $t<0$)时，有

$$\frac{D(X_1, \cdots, X_n)}{D(t, s_1, \cdots, s_{n-1})}\neq 0,$$

那么把 $t$, $s$ 看成是 $x$ 的函数，于是 $u=U(t(x), s(x))$ 就是方程 (11.1) 的解，这解当 $t=0$ 时含有(12.1)。这样，就在以非特征带的 Monge 带作为初始带时，也得到了方程(11.1)包含它的解，从而导出了与上面矛盾的結果。要想消除这种矛盾現象，可以假設解 $u=u(x)$ 应該二次連續可微。因为，在初始带是非特征的 Monge 带的情形下，一般解的曲面仅存在于 Monge 曲綫的一側，Monge 曲綫本身常常作为解的曲面上的棱(奇异点集合)出現。

**习题 2** 对于例 1 中 $c$ 的特殊的值，具体討論一下注意 2 中所說的情形。

**注意 3** 定理 12.1 証明了由初始面素組可唯一地決定二次連續可微的解，如果仅仅假設解是一次連續可微的，那么用这种証法就不能保証解的唯一性。但是，A. Haar 曾在解是一次連續可微的假設下，証明过 Cauchy 問題的解的唯一性(1928 年)，見后面 §17。

**习题 3** 对下列的微分方程求滿足所給初始条件的解。($x$, $y$ 是独立变数，$p=u_x$, $q=u_y$.)

(a) $F\equiv pq-1=0$,

初始条件：$x=0$ 时，$u=\sqrt{y}$.

(b) $F\equiv p^2+q^2-u^2=0$,

初始条件：$(x, y)=(\cos s, \sin s)$ 时 $u=ce^s$.

## §13 完 全 解

**1. 完全解** 令 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $p=(p_1, \cdots, p_n)$，如果对面素$(x^0, u^0, p^0)$成立

$$\{F_u, F_{p_1}, \cdots, F_{p_n}\}(x^0, u^0, p^0) \neq \{0, 0, \cdots, 0\}, \quad (13.1)$$

则称 $(x^0, u^0, p^0)$ 对于 $F$ **是拟正常的**。自然 $F$ 的正常面素都是 $F$ 的拟正常面素，但是 $F$ 的拟正常面素不一定是 $F$ 的正常面素。

现在設 $(x^0, u^0, p^0)$ 是满足方程 $F(x^0, u^0, p^0)=0$ 的 $F$ 的拟正常面素。則在 $(x, u, p)$ 空間 $E^{2n+1}$ 的 $(x^0, u^0, p^0)$ 的适当邻域，满足

$$F(x, u, p)=0 \quad (13.2)$$

的面素 $(x, u, p)$ 是 $x$ 以及其他 $n$ 个参变数 $s_1, \cdots, s_n$ 的函数，并有与(13.2)等价的表达式

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu = x_\nu, \\ u = U(x_1, \cdots, x_n, s_1, \cdots, s_n), \\ p_\nu = P_\nu(x_1, \cdots, x_n, s_1, \cdots, s_n), \\ \qquad (\nu=1, \cdots, n). \end{array}\right\} \quad (13.3)$$

这里

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix}\partial_{s_\mu}U & \partial_{s_\mu}P_\nu & {\scriptstyle \mu\downarrow 1,\cdots,n \atop \nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}=n. \quad (13.4)$$

事实上，根据(13.2)，就可以把 $u$ 及 $p$ 中的某一个表示成为以其余的 $n$ 个变量及 $x$ 作为独立变数的函数，因此，把这 $n$ 个作为独立变数的 $u$ 与 $p$ 写成 $n$ 个 $s$，就得到了上面的結果。反过来，若是(13.3)所表示的面素满足方程(13.2)，那么根据条件(13.4)，(13.3)就包含了一切满足 (13.2) 的面素 [至少在 $(x^0, u^0, p^0)$ 适当的邻域]。此外，利用 (13.3) 中适当的 $n$ 个式子 (一齐取前 $n$ 个式子，$x_\nu=x_\nu$ 的情形除外)，就能把 $s$ 表示成为 $x, u, p$ 的函数

$$s_\mu = s_\mu(x, u, p) \quad (\mu=1, \cdots, n).$$

现在設 $u=V(x, c_1, \cdots, c_n)$ 是偏微分方程 (13.2) [以后如果提到偏微分方程(13.2)时，那就意味着在其中取 $p_\nu=\partial_\nu u$] 的具有 $n$ 个任意常数 $c=(c_1, \cdots, c_n)$的解。又在 $(x, c)$ 空間 $E^{2n}$ 的点 $(x^0, c^0)$的某一个邻域，$u=V(x, c)$ 所含的面素为拟正常的，即满

足条件

$$\mathrm{Rk}\left(\partial_{c_\mu} V \quad \partial_{c_\mu} V_{x_\nu} \quad \begin{matrix} \mu\downarrow 1, \cdots, n \\ \nu\to 1, \cdots, n \end{matrix}\right) = n, \tag{13.5}$$

这样，$u=V(x, c)$ 在 $(x^0, c^0)$ 的邻域就称为偏微分方程 (13.2) 的**完全解**。

如果在(13.3)及(13.4)中以 $c$ 来代替 $s$，则有 $U=V, P_\nu=V_{x_\nu}$，于是得到下面的定理。

**定理 13.1** 在$(x^0, c^0)$邻域的完全解，必在$(x, u, p)=\{x, V, V_x\}(x^0, c^0)$的适当邻域包含所有满足(13.2)的面素，并且在$(x^0, c^0)$的邻域由关系式

$$(u, p)=\{V, V_x\}(x, c),$$

可以把 $c$ 表达成为 $x, u, p$ 的函数

$$c_\nu = s_\nu(x, u, p).$$

**2. 完全解与一般解的关系** 以后总把 (13.2) 考虑成为偏微分方程，并設 $u=V(x, c)$ 是 (13.2) 的完全解，$u=f(x)$ 是(13.2)的任意解。若是 $u=f(x)$ 所包含的一个面素 $(x^0, u^0, p^0)$ 也被 $u=V(x, c)$ 所包含，那么根据定理 13.1，在 $x=x^0$ 的适当邻域，$u=f(x)$所包含的一切面素都被 $u=V(x, c)$所包含，现在由

$$\{f, f_x\}(x)=\{V, V_x\}(x, c)$$

可以把 $c$ 作为 $x$ 的函数解出，而得到 $c_\nu=s_\nu(x, f(x), f_x(x))$，把它簡写成 $c=c(x)$，于是得到

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= V(x, c(x)), \\ f_{x_\nu}(x) &= V_{x_\nu}(x, c(x)) \quad (\nu=1, \cdots, n). \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

把(13.6)中的第一式对 $x_\nu$ 微分，则有

$$f_{x_\nu}(x) = (V_{x_\nu})_{c=c(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} (V_{c_\mu})_{c=c(x)} \partial_\nu c_\mu(x).$$

所以由(13.6)的后一式，就得到

$$\sum_{\mu=1}^{n} (V_{c_\mu})_{c=c(x)} \partial_\nu c_\mu(x) = 0 \quad (\nu=1, \cdots, n). \tag{13.7}$$

下面分两种情形进行討論。

第一种情形，首先考慮

$$(V_{c_1}, \cdots, V_{c_n})_{c=c(x)} \neq (0, 0, \cdots, 0) \tag{13.8}$$

的情形。这时，根据(13.7)有

$$\frac{D(c_1, \cdots, c_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} = 0.$$

即在 $x=x^0$ 的邻域，有

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} \partial_\mu c_\nu(x) & {\nu\downarrow 1,\cdots,n \atop \mu\to 1,\cdots,n} \end{pmatrix} = r < n. \tag{13.9}$$

如果 $r=0$，那么 $c(x)$ 是常数，令 $c=c^0$，则 $f(x)=V(x, c^0)$。

現在設 $1\leqslant r<n$，根据(13.9)，我們只要适当的調整 $c_\nu$ 的下标 $r$（自然在 $x=x^0$ 的邻域），就可以假設对 $c_1, c_2, \cdots, c_r$，成立

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} \partial_\mu c_\nu(x) & {\nu\downarrow 1,\cdots,r \atop \mu\to 1,\cdots,n} \end{pmatrix} = r. \tag{13.10}$$

此外，$c_{r+1}, \cdots, c_n$ 是 $c_1, \cdots, c_r$ 的函数，即

$$c_\tau(x) = h_\tau(c_1(x), \cdots, c_r(x)), \ \tau=r+1, \cdots, n. \tag{13.11}$$

現在把 $(c_1, \cdots, c_r)$ 簡单地記作 $c_{r)}$，并令

$$V(x, c_{r)}, h_{r+1}(c_{r)}), \cdots, h_n(c_{r)})) = \phi(x, c_{r)}), \tag{13.12}$$

由于 $u=\phi(x, c_{r)})$ 是(13.2)的解，所以由(13.6)及(13.11)就有

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \phi(x, c_{r)}(x)), \\ f_{x_\nu}(x) &= \phi_{x_\nu}(x, c_{r)}(x)). \end{aligned}\right\} \tag{13.13}$$

正如根据(13.6)可得出(13.7)一样，根据(13.13)也同样地有

$$\sum_{\rho=1}^{r} (\phi_{c_\rho})_{c=c(x)} \partial_\nu c_\rho(x) = 0 \quad (\nu=1, \cdots, n).$$

由这个式子，以及(13.10)就得到

$$\text{当 } c=c(x) \text{ 时，} \ \phi_{c_\rho}(x, c_{r)}) = 0 \quad (\rho=1, \cdots, r). \tag{13.14}$$

这时，如果

$$\left|\phi_{c_\rho c_\sigma}(x^0, c^0) \quad {\rho\downarrow 1,\cdots,r \atop \sigma\to 1,\cdots,r}\right| \neq 0 \tag{13.15}$$

(参看注意1)，那么用(13.14)就能决定隐函数 $c_{r)}$，从而得到 $c_{r)}=c_{r)}(x)$。

反过来，設 $h_\tau(c_{r)})(\tau=r+1,\cdots,n)$ 是 $c_{r)}$ 的任意函数(仅在适当的范圍内)，而用(13.12)来定义 $\phi(x, c_{r)})$，则 $u=\phi(x, c_{r)})$ 自然是方程(13.2)的解。这时，如果有满足(13.15)以及 $\phi_{c_\rho}(x^0,c^0_{r)})=0$ 的值 $(x^0,c^0)$ 存在，那么在 $(x^0,c^0)$ 的邻域中，由(13.14)可以决定 $c_{r)}$ 为 $x$ 的函数：$c_{r)}=c_{r)}(x)$。把这个函数代到 $\phi(x, c_{r)})$ 内，并令 $\phi(x, c_{r)}(x))=f(x)$，则根据(13.14)可知(13.13)成立，即 $u=f(x)$ 是方程(13.2)的解。

以上的結果可簡单地述說如下：首先把 $n-r$ 个 $c$ $(r\geqslant 1)$ 表示成为其余的 $r$ 个 $c$ 的任意函数，那么由完全解 $u=V(x, c)$ 就能得到仅包含有 $r$ 个任意常数 $c_{r)}$ 的解 $u=\phi(x, c_{r)})$，方程(13.2)的一般解 $u=f(x)$ 可以作为曲面族 $u=\phi(x, c_{r)})$ 的包絡面而得到。

**3. 完全解与奇异解的关系**　现在考虑第二种情形，即在 $x=x^0$ 的邻域有

$$(V_{c_\mu})_{c=c(x)}=0 \quad (\mu=1, \cdots, n) \tag{13.16}$$

的情形。这时，設 $c(x^0)=c^0$，并且設

$$\left|V_{c_\mu c_\nu}(x^0, c^0) \quad {}^{\mu\downarrow 1,\cdots,n}_{\nu\to 1,\cdots,n}\right| \neq 0 \tag{13.17}$$

成立(参看注意1)，$c=c(x)$ 是由(13.16)所决定的隐函数。把这种 $c=c(x)$ 代到 $u=V(x, c)$ 中，就得到了 $u=f(x)$，于是 $u=f(x)$ 是曲面族 $u=V(x, c)$ 所作的包絡面。

反过来，設曲面族 $u=V(x, c)$ 所作的包絡面是 $u=f(x)$。即对于由(13.16)所决定的函数 $c=c(x)$，有 $V(x, c(x))=f(x)$，这时，很容易得到(13.6)，从而証明了 $u=f(x)$ 是(13.2)的解。此外 $u=f(x)$ 还是(13.2)的奇异解。事实上，首先有

$$F(x, V, V_x)=0,$$

把这个式子对 $c_\mu$ 微分，則有

$$\left(F_u V_{c_\mu}+\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} V_{x_\nu c_\mu}\right)_{(u,p)=(V,V_x)}=0. \qquad (13.18)$$

而由(13.6)及(13.16)，就得到

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu}(x,f,f_x)(V_{x_\nu c_\mu})_{c=c(x)}=0 \quad (\mu=1,\cdots,n). \quad (13.19)$$

另一方面，由(13.5)及(13.16)我們有

$$\left|(V_{x_\nu c_\mu})_{c=c(x)} \quad {}^{\mu=1,\cdots,n}_{\nu=1,\cdots,n}\right| \neq 0,$$

所以由(13.19)就得到

$$F_{p_\nu}(x,f,f_x)=0 \quad (\nu=1,\cdots,n). \qquad (13.20)$$

故 $u=f(x)$ 是方程(13.2)的奇异解。

反过来，如果 $u=f(x)$ 是(13.2)的奇异解，則 $u=f(x)$ 与 $u=V(x,c)$ 至少有一个公共面素。在这个公共点的邻域，存在着满足(13.6)的 $c=c(x)$。故由(13.18)与(13.20)就有

$$F_u(x,f,f_x)(V_{c_\mu})_{c=c(x)}=0 \quad (\mu=1,\cdots,n).$$

此外，由于 $u=V$ 的拟正常性(13.1)及(13.20)，有 $F_u(x,f,f_x)\neq 0$。所以 $c=c(x)$ 满足(13.16)，卽 $u=f(x)$ 是曲面族 $u=V(x,c)$ 的包絡面。

上面的討論可总結如下：完全解 $u=V(x,c)$ 的包絡面 $u=f(x)$ 是奇异解。此外，与 $u=V(x,c)$ 有一个公共面素的奇异解 $u=f(x)$ 是 $u=V(x,c)$ 的包絡面。

本节中所說的事实将在下一节中举例說明。

**注意 1** 本节的討論，只要假設 $F(x,u,p)$ 一次可微，$f(x)$ 与 $V(x,c)$ 二次連續可微卽可。

为了方便起見，假設(13.15)成立，$c=c(x)$ 是由(13.14)所决定的隐函数。但若有(13.14)，那么就必然成立(13.15)。为了証明这个事实，首先我們要証明

$$\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\phi_{c_\rho} & \phi_{x_\nu c_\rho} & {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,r}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}=r. \tag{13.21}$$

假設矩陣在 $(x, c)=(x^0, c^0)$ 处的秩数 $<r$，那么存在着 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)\neq(0, \cdots, 0)$，使得下式成立

$$\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\phi_{c_\rho}(x^0, c^0)=0, \quad \sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\phi_{x_\nu c_\rho}(x^0, c^0)=0 \quad (\nu=1, \cdots, n).$$

这时，对于 $\tau>r$，令

$$\lambda_\tau=\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\partial_\rho h_\tau(c^0) \quad (\tau=r+1, \cdots, n),$$

则由(13.12)，就得到

$$\sum_{\mu=1}^{n}\lambda_\mu V_{c_\mu}(x^0, c^0)=0, \quad \sum_{\mu=1}^{n}\lambda_\mu V_{x_\nu c_\mu}(x^0, c^0)=0 \quad (\nu=1, \cdots, n),$$

但是这个结果与(13.5)矛盾，故(13.21)成立。由(13.14)及(13.21)就有

$$\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\phi_{x_\nu c_\rho} & {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,r}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}=r. \tag{13.22}$$

又根据(13.14)(对 $x_\nu$ 微分)有

$$\left(\phi_{x_\nu c_\rho}+\sum_{\sigma=1}^{r}\phi_{c_\rho c_\sigma}\partial_\nu c_\sigma\right)_{c=c(x)}=0 \quad \begin{pmatrix}\rho=1,\cdots,r\\ \nu=1,\cdots,n\end{pmatrix}. \tag{13.23}$$

由这个結果就知道

$$\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\phi_{x_\nu c_\rho} & {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,r}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}_{c=c(x)}\leqslant\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\phi_{c_\rho c_\sigma} & {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,r}_{\sigma\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}.$$

再由这个式子与(13.22)就有

$$\begin{vmatrix}(\phi_{c_\rho c_\sigma})_{c=c(x)} & {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,r}_{\sigma\to 1,\cdots,r}\end{vmatrix}\neq 0.$$

完全同样地，根据(13.16)有

$$\begin{vmatrix}V_{c_\mu c_\nu}(x, c(x)) & {}^{\mu\downarrow 1,\cdots,n}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{vmatrix}\neq 0.$$

此外由(13.23)有

$$\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\phi_{x_\nu c_\rho} & {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,r}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}_{c=c(x)}\leqslant\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\partial_\nu c_\sigma(x) & {}^{\sigma\downarrow 1,\cdots,r}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}.$$

由这个式子及(13.22)就能得到

$$\operatorname{Rk}\begin{pmatrix}\partial_\nu c_\sigma(x) & {}^{\sigma\downarrow 1,\cdots,r}_{\nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}=r.$$

对于第二种情形也能同样地証明($r=n$)。

**注意 2** 对于以 $x$ 的連續函数作为元素的矩陣，当

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} a_{ij}(x) & {\scriptstyle i\downarrow 1,\cdots,l} \\ & {\scriptstyle j\to 1,\cdots,m} \end{pmatrix}$$

在 $x=x^0$ 的邻域一定的时候，这种点 $x^0$ 叫做矩陣的**正規点**。对于矩陣是正規的点的全体組成一个开集合，即对于矩陣非正規的点的全体組成一个閉集合。这个集合是离散閉集(即无內点的，証明从略)。因此在第一种情形中，这就是說：除了一个离散閉集以外，对于任意的点 $x=x^0$，在 $x^0$ 的邻域中(13.9)成立。自然 $r$ 的值对于不同的点是相异的。

其次，既不属于第一种情形也不属于第二种情形的点 $x=x^0$ 也組成离散閉集，因此本节所說的事实，在除去一个离散閉集以后的空間的各个部分都成立。

若 $f(x)$ 及 $V(x,c)$ 解析正則，則所除去的閉集合是解析流形。这时，对于除掉了这个流形以后的点的全体，可确定它或者属于第一种情形，而 $r$ 是一定的，或者属于第二种情形。

## §14 簡单的一阶偏微分方程

我們在本节介紹几类容易求到完全解的偏微分方程。

### 1. 仅含有 $p$ 的微分方程

$$F(p_1,\cdots,p_n)=0 \quad (p_\nu=\partial_\nu u). \tag{14.1}$$

我們仅討論对于 $F(p)$ 是正常的情形，即 $\{F_{p_1},\cdots,F_{p_n}\}\neq(0,\cdots,0)$ 的情形[現在拟正常的面素(14.1)全部是正常的]，把(14.1)在 $p$ 空間 $E^n$ 中所决定的 $n-1$ 維流形用参变数表示，則有

$$p_\nu=\gamma_\nu(s_1,\cdots,s_{n-1}) \quad (\nu=1,\cdots,n),$$

并且

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} \partial_\mu\gamma_\nu(s) & {\scriptstyle \nu\downarrow 1,\cdots,n} \\ & {\scriptstyle \mu\to 1,\cdots,n-1} \end{pmatrix}=n-1. \tag{14.2}$$

这样，如果設

$$V(x,c)=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu(c_1,\cdots,c_{n-1})x_\nu+c_n, \tag{14.3}$$

則 $u=V(x,c)$ 显然是方程(14.1)的解。此外由(14.2)有

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} V_{c_\mu} & V_{x_\nu c_\mu} & {\scriptstyle \mu\downarrow 1,\cdots,n} \\ & & {\scriptstyle \nu\to 1,\cdots,n} \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{Rk}\begin{pmatrix}\sum_{\sigma=1}^{n}\partial_\mu\gamma_\sigma(c)x_\sigma & \partial_\mu\gamma_\nu(c) & {\scriptstyle \mu\downarrow 1,\cdots,n-1} \\ 1 & 0 & {\scriptstyle \nu\to 1,\cdots,n}\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{Rk}\left(\partial_\mu\gamma_\nu(c)\quad {\scriptstyle \mu\downarrow 1,\cdots,n-1 \atop \nu\to 1,\cdots,n}\right)+1=n.$$

故 $u=V(x, c)$ 是完全解。

現在,令 $c_n=h(c_1, \cdots, c_{n-1})$,并且設

$$\partial_\mu h(c^0)=0 \quad (\mu=1, \cdots, n-1), \tag{14.4}$$

$$\left|\partial^2_{\mu\nu}h(c^0) \quad {\scriptstyle \mu\downarrow 1,\cdots,n-1 \atop \nu\to 1,\cdots,n-1}\right|\neq 0, \tag{14.5}$$

那么对于 $V(x, c)_{c_n=h(c)}=\phi(x, c_1, \cdots, c_{n-1})$,在 $(x,c)=(x^0, c^0)$ 的邻域(特别在 $(x^0, c^0)$ 处)就有

$$\left|\phi_{c_\mu c_\nu} \quad {\scriptstyle \mu\downarrow 1,\cdots,n-1 \atop \nu\to 1,\cdots,n-1}\right|\neq 0, \quad \phi_{c_\mu}(x^0, c^0)=0.$$

因此,

$$\phi_{c_\mu}(x, c)=0 \quad (\mu=1, \cdots, n-1),$$

从而可以决定隐函数 $c=c(x)$。把这种 $c=c(x)$ 代入 $u=V(x, c)$ 内,就得到了 $u=f(x)=V(x, c(x))$,它就是方程(14.1)的一般解[因为这里的 $h(c)$ 是任意的函数]。

方程(14.1)不具有由完全解的包絡面所形成的奇异解。

**2. 变数分离型**

$$F\equiv\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(x_\nu, p_\nu)=0 \quad (p_\nu=\partial_\nu u). \tag{14.6}$$

这种形式的方程叫做**变数分离型**的方程。現在假設令

$$u=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu(x_\nu)+c, \tag{14.7}$$

由于 $\partial_\nu u=y'_\nu(x_\nu)$,所以有

$$\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(x_\nu, y'_\nu(x_\nu))=0.$$

但因 $x_1, \cdots, x_n$ 是相互独立的变数,所以可設各項都是常数:即

$$f_\nu(x_\nu, y'_\nu(x_\nu)) = a_\nu, \quad \text{而} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0. \tag{14.8}$$

現在設

$$\partial_p f_\nu(x_\nu^0, p_\nu^0) \neq 0 \quad (\nu = 1, \cdots, n), \tag{14.9}$$

于是在 $x^0$, $p^0$ 的邻域,可以由(14.8)解出 $y'_\nu$,而有

$$y'_\nu = g_\nu(x_\nu, a_\nu) \quad (\nu = 1, \cdots, n). \tag{14.10}$$

因此根据(14.7),并且取 $a_n = -\sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu$,則得到

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} g_\nu(x, a_\nu)dx + c = V(x, a_1, \cdots, a_{n-1}, c). \tag{14.11}$$

我們还要进一步論証这个解是完全解。首先有

$$V_{x_\nu} = g_\nu(x_\nu, a_\nu), \quad V_c = 1. \tag{14.12}$$

其次,如果把(14.10)代入(14.8),因为它成为恒等式,所以有

$$\partial_p f_\nu(x, p)_{p=g} \cdot \partial_a g_\nu(x, a) = 1,$$

于是由(14.12),对于 $\mu = 1, \cdots, n-1$,就有

$$V_{x_\nu a_\mu} = \delta_{\mu\nu} \partial_a g_\nu(x_\nu, a_\nu) = \delta_{\mu\nu} (\partial_p f_\nu)^{-1}_{p=g}$$
$$(\mu = 1, \cdots, n-1).$$

但是

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} V_{a_\mu} & V_{x_\nu a_\mu} & \mu\downarrow 1, \cdots, n-1 \\ V_c & V_{x_\nu c} & \nu\to 1, \cdots, n \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{Rk}\left(V_{x_\nu a_\mu} \quad \begin{matrix} \mu\downarrow 1, \cdots, n-1 \\ \nu\to 1, \cdots, n \end{matrix}\right) + 1 = n$$

(由于 $V_c = 1$, 及 $V_{x_\nu c} = 0$),所以 $u = V(x, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n)$ 是方程的完全解。

由于(14.6)的拟正常的解就是正常的解,所以不存在由完全解的包絡面所形成的奇异解。

**例** $\sum_{\nu=1}^{n} (p_\nu^2 - x_\nu) = 0.$

与(14.8)相当的式子是

$$(y_\nu'^2 - x_\nu) = a_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0,$$

所以 $y'_\nu=\pm\sqrt{x_\nu+a_\nu}$，即 $y_\nu=\pm\frac{2}{3}(x_\nu+a_\nu)^{3/2}$，于是完全解是

$$u=V=\frac{2}{3}\sum_{\nu=1}^{n-1}\pm(x_\nu+c_\nu)^{3/2}\pm\frac{2}{3}\left(x_n-\sum_{\nu=1}^{n-1}c_\nu\right)^{3/2}+c_n.$$

### 3. Clairaut 微分方程

形如

$$F\equiv u-\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu x_\nu+f(p_1,\cdots,p_n)=0 \qquad (14.13)$$

的方程叫做 **Clairaut 微分方程**。如果令

$$u=V(x,c)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu x_\nu-f(c_1,\cdots,c_n), \qquad (14.14)$$

容易驗証，这个函数就是方程(14.13)的解。此外，由于

$$V_{x_\nu c_\mu}=\delta_{\nu\mu},$$

所以

$$\mathrm{Rk}\left((V_{c_\mu}\quad V_{x_\nu c_\mu}\quad {}^{\mu\downarrow 1,\cdots,n}_{\nu\to 1,\cdots,n}\right)=n,$$

即 $u=V(x,c)$ 确是方程的完全解。

再者，由于 $V_{c_\mu c_\nu}=f_{c_\mu c_\nu}(c)$，所以当

$$\left|f_{c_\mu c_\nu}\quad {}^{\mu\downarrow 1,\cdots,n}_{\nu\to 1,\cdots,n}\right|\neq 0 \qquad (14.15)$$

时，从

$$V_{c_\mu}=-x_\mu+f_{c_\mu}(c)=0 \qquad (14.16)$$

可知，在 $x$ 的适当范圍内[例如在 $x_\mu^0=f_{c_\mu}(c^0)$的邻域]，可以把 $c$ 解出成为 $x$ 的函数 $c=c(x)$. 把它代入 $u$，就有

$$u=V(x,c(x))=f(x),$$

它是 (14.14) 的包絡面，故 $u=f(x)$ 是方程的奇异解。如果利用(14.16)不能够具体地把 $c$ 解成 $x$ 的函数，那么可以把 $c$ 作为参变数而用 $s$ 来代表，这样我們就得到了奇异解的参变数表示式

$$x_\mu=f_{c_\mu}(s_1,\cdots,s_n),\quad u=\sum_{\nu=1}^{n}s_\nu f_{c_\mu}(s)-f(s),$$

此外，由于 $F_u=1$，所以方程(14.13)所有的解都是拟正常的。現在完全解 $u=V(x,c)$ 包含一切滿足(14.13)的面素，即(14.13)的奇异解是 $u=V(x,c)$ 的包絡面，并且都可以用上面說的方法求得。

习題 1 試闡明求方程 $f_1(x_1,p_1)\cdots f_n(x_n,p_n)=1$ $(p_\nu=\partial_\nu u)$ 适当的完全解的方法。

习題 2 求下列方程的适当的完全解及奇异解(如果存在的話)，其中 $x,y$ 是独立变数，$p=u_x$，$q=u_y$。

(a) $pq=1$，　　(b) $p^2+q^2=x+y$，

(c) $xp+yq=p^2+q^2$，　　(d) $u=xp+yq+pq$。

## §15 由完全解导出特征带

**1. 把方程直接变成不含 $u$ 的方程** 設偏微分方程

$$F(x,u,p)=0 \quad (p=u_x) \tag{15.1}$$

的完全解是 $u=u(x,c)$，其中 $c$ 是任意的常数(在适当范圍内)，假設 $u$ 能够作为滿足方程

$$w(x,u)=c \quad w_u\neq 0 \tag{15.2}$$

的隐函数而得到，那么就有

$$u_{x_\nu}=-(w_{x_\nu}/w_u)_{u=u(x,c)}, \tag{15.3}$$

把这个式子代入(15.1)，就得

$$F(x,u,-w_{x_1}/w_u,\cdots,-w_{x_n}/w_u)=0. \tag{15.4}$$

因为 $c$ 是任意的，所以 $(x,u)$ 都是任意的变数(在适当的范圍内)，如果把它們看成是独立变数，那么 $w$ 就应該恒等地滿足(15.4)。

反过来，对于滿足方程(15.4)的 $w=w(x,u)$，若是 $w_u\neq 0$，那么用(15.2)所决定的隐函数 $u=u(x,c)$ 就是方程(15.1)的解。

現在有这样的一个問題，就是用这种方法是否能够得到方程(15.1)所有的解？对于这个問題，我們可以象§7那样来考察，就

知道方程 (15.1) 所有正常的解都能用这种方法求得。事实上，設 $u=u(x)$ 是方程(15.1)在 $x=x^0$ 处的正常解，不失去問題的一般性，允許假定 $F_{p_1}(x^0, u^0, p^0)\neq 0$，这里 $(u^0, p^0)=\{u, u_x\}(x^0)$，于是在 $x=x^0$ 的邻域，$u=u(x)$ 就是与方程 (15.1) 等价的基准型方程

$$p_1=f(x, u, p_2, \cdots, p_n) \quad (p_\nu=u_{x_\nu}) \tag{15.5}$$

的解。因此，如果令 $u(x_1^0, x_2, \cdots, x_n)=\phi(x_2, \cdots, x_n)$，則解 $u=u(x)$ 就由初始条件

$$x_1=x_1^0 \text{ 时，} u=\phi(x_2, \cdots, x_n) \tag{15.6}$$

所唯一决定。由于 $u=u(x)$ 满足(15.5)，所以它也就是方程(15.1)的解。

现在令

$$F(x, u, -q_1/q_0, \cdots, -q_n/q_0)=\widetilde{F}(x, u, q_1, \cdots, q_n, q_0),$$

当 $\widetilde{F}_{q_1}=-q_0^{-1}F_{p_1}\neq 0$ 时，方程 (15.4) 根据初始条件"$x_1=x_1^0$ 时，$w=u-\phi(x_2, \cdots, x_n)$"所决定的解 $w=w(x, u)$ 是唯一的。这个解由于在 $x=x^0$ 的某一邻域中满足 $w_u\neq 0$，所以用方程 $w(x,u)=0$ 所决定的函数 $u=u(x)$，就是方程 (15.1) 满足初始条件 (15.6) 的解。

根据以上的討論，我們恒可以把一阶的偏微分方程直接变换成为不含未知函数的方程(仅仅独立变数多了一个)。故在以后的討論中，我們仅考虑不含 $u$ 的方程，即

$$F(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)=0 \quad (p_\nu=\partial_\nu u). \tag{15.7}$$

对方程(15.7)来說，一切拟正常的解都是正常解。此外，若 $u=u(x)$ 是(15.7)的解，那么 $u=u(x)+c$ ($c$ 是任意常数) 也是方程(15.7)的解。故(15.7)的完全解取下面的形式

$$u=W(x, c_1, \cdots, c_{n-1})+c_n. \tag{15.8}$$

为了使这样的函数是方程的完全解，充分而必要的条件是

$u=W(x, c)+c_n$ 是(15.7)的正常解，即

$$\mathrm{Rk}\left(W_{x_\nu c_\rho} \quad {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,n-1}_{\nu\to 1,\cdots,n}\right)=n-1. \tag{15.9}$$

**2. 由完全解导出特征带** 由方程(15.7)的完全解(15.8)，可以用微分法与消去法导出方程(15.7)的特征带。首先，令 $c_n$ 为 $c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的任意函数，即 $c_n=\alpha(c_1, \cdots, c_{n-1})$，并設

$$W(x, c_1,\cdots, c_{n-1})+\alpha(c_1,\cdots, c_{n-1})=\phi(x, c_1,\cdots, c_{n-1}). \tag{15.10}$$

由于 $\phi_{x_\nu c_\rho}=W_{x_\nu c_\rho}$，所以从(15.9)就有

$$\mathrm{Rk}\left(\phi_{x_\nu c_\rho} \quad {}^{\rho\downarrow 1,\cdots,n-1}_{\nu\to 1,\cdots,n}\right)=n-1. \tag{15.11}$$

这样，当 $c$ 是常数时，下列的 $n-1$ 个方程

$$\phi_{c_\rho}(x, c)=0 \quad (\rho=1, \cdots, n-1), \tag{15.12}$$

在空間 $E^n$ 中就决定一条曲綫[維数是 $n-(n-1)=1$ 的流形]：

$$x_\nu=x_\nu(t) \quad (\nu=1, \cdots, n), \tag{15.13}$$

这里，$t$ 是曲綫的参变数。

如果令

$$\phi(x(t), c)=u(t), \quad \phi_{x_\nu}(x(t), c)=p_\nu(t), \tag{15.14}$$

現在我們来証明，$(x, u, p)=\{x, u, p\}(t)$ 就是方程(15.7)的特征带。

首先，由于(15.13)滿足(15.12)，因此把它們代入(15.12)，然后再对 $t$ 微分，就得到

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\phi_{x_\nu c_\rho})_{x=x(t)}x_\nu'(t)=0 \quad (\rho=1, \cdots, n-1). \tag{15.15}$$

此外，由于 $u=\phi(x, c)$ 是方程(15.7)的解，把它代入(15.7)并对 $c_\rho$ 微分，就得到

$$\sum_{\nu=1}^{n}(F_{p_\nu})_{p=\phi_x}\phi_{x_\nu c_\rho}=0.$$

但是由(15.14)，上式可写成

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\phi_{x_\nu c_\rho})_{x=x(t)}(F_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}=0$$

$$(\rho=1,\ \cdots,\ n-1). \tag{15.16}$$

把它和方程(15.15)比較．因为我們可以把它們看成是同样以$(\phi_{x_\nu c_\rho})_{x=x(t)}$为系数的联立一次方程組，并且由于(15.11)成立，所以(15.15)的解$x'_\nu(t)$必需与(15.16)的解$(F_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}$成比例。这表示(由于$F$的正常性)存在一个数量函数$\lambda(t)$，使得

$$x'_\nu(t)=\lambda(t)(F_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}\quad(\nu=1,\ \cdots,\ n), \tag{15.17}$$

因此由(15.14)及(15.17)，容易地得出

$$u'(t)=\lambda(t)\sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu F_{p_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}. \tag{15.18}$$

此外，由于$u=\phi(x,\ c)$是(15.7)的解，对$x_\nu$微分后，有

$$\left\{F_{x_\nu}+\sum_{\mu=1}^{n}F_{p_\mu}\phi_{x_\mu x_\nu}\right\}_{p=\phi_x}=0. \tag{15.19}$$

另一方面，由(15.14)及(15.17)有

$$p'_\nu(t)=\sum_{\mu=1}^{n}(\phi_{x_\mu x_\nu})_{x=x(t)}x'_\mu(t)=\lambda(t)\sum_{\mu=1}^{n}(F_{p_\mu}\phi_{x_\mu x_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)},$$

故由(15.19)得到

$$p'_\nu(t)=-\lambda(t)(F_{x_\nu})_{(x,p)=(x,p)(t)}. \tag{15.20}$$

綜合(15.17)，(15.18)及(15.20)就得到

$$\frac{dx_\nu}{F_{p_\nu}}=\frac{du}{\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu F_{p_\nu}}=\frac{dp_\nu}{-F_{x_\nu}}=\lambda dt, \tag{15.21}$$

即$(x,\ u,\ p)=\{x,\ u,\ p\}(t)$是方程(15.7)的特征带。

因为在(15.10)中$\alpha(c_1,\ \cdots,\ c_{n-1})$是任意的函数，所以只要适当地选擇这个函数，就能够得到(15.7)的一般特征带。为了說明这一点，譬如我們看一看当

$$\alpha(c_1,\ \cdots,\ c_{n-1})=-\sum_{\rho=1}^{n-1}b_\rho c_\rho+a \tag{15.22}$$

的情形。这时(15.12)成为

$$W_{c_\rho}(x, c) - b_\rho = 0. \tag{15.23}$$

对于任意一个满足方程(15.7)的面素 $(x^0, u^0, p^0)$，成立着决定 $c^0$ 的方程組

$$\left.\begin{aligned} W(x^0, c^0) + c_n^0 = u^0, \\ W_{x_\nu}(x^0, c^0) = p_\nu^0. \end{aligned}\right\} \tag{15.24}$$

由于 (15.8) 是方程的完全解，所以当 $(x^0, u^0, p^0)$ 在适当范围内的时候，利用上式就可以完全决定 $c^0$。于是由 (15.23) 可以决定 $b_\rho = W_{c_\rho}(x^0, c^0)$，最后利用

$$-\sum_{\rho=1}^{n-1} b_\rho c_\rho^0 + a = c_n^0$$

可以决定 $a$。这样就得到了包含任意面素 $(x^0, u^0, p^0)$ 的特征带。

为了简单起見，本节仅討論了 $F$ 中不含 $u$ 的情形，至于 $F$ 含有 $u$ 的情形，可以用同样的方法由完全解来求出特征带。

**注意** 現在証明一下，方程(15.7)具有形式如(15.8)的完全解。設 $(x^0, u^0, p^0)$ 是方程(15.7)任意的正常面素($u^0$ 的值完全任意)，不失去一般性可以假設 $F_{p_1}(x^0, p^0) \neq 0$，于是在 $(x, u, p)$ 空間中点 $(x^0, u^0, p^0)$ 的适当邻域，可以得到与(15.7)等价的基准型方程

$$p_1 = f(x, p_2, \cdots, p_n) \quad (p_\nu = \partial_\nu u).$$

对于和 $(c_1, \cdots, c_{n-1}) = (p_2^0, \cdots, p_n^0)$ 邻近的任意的 $c$，这个方程具有初始条件

$$x_1 = x_1^0 \text{ 时}, \quad u = \sum_{\rho=1}^{n-1} c_\rho (x_{\rho+1} - x_{\rho+1}^0) + u^0$$

所决定的解 $u = W(x, c_1, \cdots, c_{n-1})$。对于这个解，由于成立着关系式

$$(W_{x_{\rho+1}})_{x_1=x_1^0} = c_\rho, \quad (W_{x_{\rho+1}c_\sigma})_{x_1=x_1^0} = \delta_{\rho\sigma}$$
$$(\rho, \sigma = 1, \cdots, n-1),$$

所以滿足(15.9)中的条件。

## §16 Hamilton-Jacobi 偏微分方程

**1. Hamilton 正則方程** 設 $(t, x) = (t, x_1, \cdots, x_n)$ 是独立

变数，关于 $w=w(t,x)$ 的偏微分方程

$$\partial_t w+H(t,x,p_1,\cdots,p_m)=0\quad(p_\nu=w_{x_\nu}),\qquad(16.1)$$

叫做 Hamilton-Jacobi 偏微分方程。它的特征微分方程組是

$$\frac{d}{dt}x_\nu=H_{p_\nu},\quad\frac{d}{dt}p_\nu=-H_{x_\nu}\quad(\nu=1,\cdots,m),\qquad(16.2)$$

$$\frac{d}{dt}w=\sum_{\nu=1}^{m}p_\nu H_{p_\nu}-H,\quad\frac{d}{dt}p_0=-H_t,\qquad(16.3)$$

这里 $t$ 是独立变数，并且 $\partial_t w=p_0$。因为(16.1)可以写成 $F\equiv p_0+H=0$，卽 $p_0=-H$，所以有 $\sum\limits_{\nu=0}^{m}p_\nu F_{p_\nu}=\sum\limits_{\nu=1}^{m}p_\nu H_{p_\nu}-H$。

因为 $H$ 不含有 $w$，所以方程組(16.2)可以看成是仅仅含有 $(x,p)$ 的联立微分方程組。这組方程叫做 **Hamilton 正則方程**，它是力学与变分学中重要的微分方程。

因为(16.2)的解是方程(16.1)的特征带，所以可使用前节的方法 $(n=m+1)$。設

$$w=W(t,x,c_1,\cdots,c_m)+c_{m+1},\qquad(16.4)$$

$$\left|W_{x_\nu c_\mu}\quad{}^{\mu=1,\cdots,m}_{\nu=1,\cdots,m}\right|\neq0\qquad(16.5)$$

是用上一节的方法所得到的完全解；于是与(15.23)相当的式子是

$$W_{c_\mu}(t,x,c)=b_\mu\quad(\mu=1,\cdots,m),\qquad(16.6)$$

现在把 $x_\nu=x_\nu(t)$ 代入，并令

$$W_{x_\nu}(t,x(t),c)=p_\nu(t)\quad(\nu=1,\cdots,m),\qquad(16.7)$$

则由(16.3)就能得到 $w$，

$$w(t)=\int\Big(\sum_{\nu=1}^{m}p_\nu H_{p_\nu}-H\Big)_{(x,p)=(x,p)(t)}dt.\qquad(16.8)$$

下面我們举几个典型的应用例題。

**2. 中心力場中質点的运动方程**　古典力学中关于靜止坐标系的質点运动方程是

$$\frac{d}{dt}x_\nu = H_{p_\nu} = \frac{1}{m}p_\nu,\quad \frac{d}{dt}p_\nu = -H_{x_\nu} = -U_{x_\nu}(x)$$

$$(\nu=1,\cdots,n),$$

其中

$$H=\frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu^2+U(x)\quad (m\text{ 是質点的質量}),$$

$U$ 是位能(普通 $n=2$，或是 $=3$)。

如果使用平面极坐标，則 $(x_1, x_2)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，而 $U(x)$ 在中心力場的情形下，是仅与 $r$ 有关的函数，即 $U=g(r)$。这样，經过簡单的換算，容易得到

$$H=\frac{1}{2m}(w_r^2+r^{-2}w_\theta^2)+g(r). \tag{16.9}$$

因此 Hamilton-Jacobi 微分方程是

$$\partial_t w+\frac{1}{2m}(w_r^2+r^{-2}w_\theta^2)+g(r)=0. \tag{16.10}$$

为了求这个方程的完全解，我們設

$$w=W=-at+b\theta+\phi(r), \tag{16.11}$$

把它代入(16.10)(由于 $a$, $b$ 是常数)，就得到

$$-a+\frac{1}{2m}(\phi'(r)^2+b^2r^{-2})+g(r)=0,$$

于是有

$$\phi(r, a, b)=\pm\int\sqrt{2ma-2mg(r)-b^2r^{-2}}\,dr. \tag{16.12}$$

如果在(16.11)中令

$$W_a=c,\quad W_b=c',$$

那么就得到

$$-t+\phi_a(r, a, b)=c,\quad \theta+\phi_b(r, a, b)=c',$$

所以对于(16.12)的 $\phi$，我們得到了有关于 $t$ 及 $\theta$ 的公式

$$\left.\begin{aligned}t&=-m\int(2ma-2mg(r)-b^2r^{-2})^{-1/2}dr-c,\\ \theta&=m\int br^{-2}(2ma-2mg(r)-b^2r^{-2})^{-1/2}dr+c'.\end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

**习题1** 对于(16.11)的$W$，成立着

$$\begin{vmatrix} W_{\theta a} & W_{\theta b} \\ W_{ra} & W_{rb} \end{vmatrix} = \pm \frac{m}{\sqrt{2ma-2mg-b^2r^{-2}}} \neq 0,$$

討論一下用(16.11)所求的解是完全解的条件。

**习题2** 設$g(r)=kr^{-1}$ ($k$常数)，計算(16.13)。

**3. 曲面的測地綫** 設已知以$u, v$为参数的曲面方程(三維空間的二維流形)为

$$(x, y, z)=\{X, Y, Z\}(u, v).$$

对于曲面上的曲綫，即以曲面坐标$(u, v)$所表示的方程$(u, v)=\{u, v\}(t)$，它的弧长是

$$S=\int\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt,$$

这里，

$$E=X_u^2+Y_u^2+Z_u^2,\quad G=X_v^2+Y_v^2+Z_v^2,$$
$$F=X_uX_v+Y_uY_v+Z_uZ_v.$$

这时，曲面的測地綫就是下列 Hamilton 正則方程

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dt}=H_p, & \dfrac{dv}{dt}=H_q, \\ \dfrac{dp}{dt}=-H_u, & \dfrac{dq}{dt}=-H_v \end{array}\right\} \tag{16.14}$$

的解，这里

$$H=\frac{1}{2}(EG-F^2)^{-1}(Gp^2-2Fpq+Eq^2) \tag{16.15}$$

(我們在这里把$x_1, x_2, p_1, p_2$，写成$u, v, p, q$)。

正則方程所对应的 Hamilton–Jacobi 偏微分方程是

$$w_t+\frac{1}{2}(EG-F^2)^{-1}(Gw_u^2-2Fw_uw_v+Ew_v^2)=0. \tag{16.16}$$

如果能得到满足条件

$$\begin{vmatrix} W_{u,a} & W_{v,a} \\ W_{u,b} & W_{v,b} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{16.17}$$

的完全解 $w=W(t, u, v, a, b)+c$，则由

$$W_a=c, \quad W_b=c' \tag{16.18}$$

就能够求得测地綫方程 $(u, v)=\{u, v\}(t)$。

現在試令

$$W=-\frac{a^2}{2}t+a\psi(u, v, b) \quad (a\neq 0). \tag{16.19}$$

設 $w=W$，并把它代入方程(16.16)，則有

$$G\psi_u^2-2F\psi_u\psi_v+E\psi_v^2=EG-F^2. \tag{16.20}$$

对于这个解 $\psi$，(16.18)就成为

$$W_a=-at+\psi, \quad W_b=a\psi_b, \tag{16.21}$$

因此条件(16.17)，当 $a\neq 0$ 时，就是

$$\begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \psi_{u,b} & \psi_{v,b} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{16.22}$$

因此我們只要求出方程(16.20)滿足条件(16.22)的解卽可．又因为測地綫与参变数的选擇无关，所以由(16.18)的第二个式子(滿足(16.21))就得到測地綫方程

$$\psi_b(u, v, b)=C. \tag{16.23}$$

作为例题，我們考虑一下回轉曲面(以 $z$ 軸为回轉軸)

$$(x, y, z)=\{f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\}, \tag{16.24}$$

这里

$$E=f'(u)^2+g'(u)^2, \quad F=0, \quad G=f(u)^2,$$

所以現在的方程(16.20)是

$$G(u)\psi_u^2+E(u)\psi_v^2=E(u)G(u). \tag{16.25}$$

把

$$\psi=\varphi(u)-bv \tag{16.26}$$

代入方程，就得到

$$\varphi'(u)=\pm\sqrt{E(u)(1-b^2\cdot G(u))}. \tag{16.27}$$

于是由(16.23)及(16.26)，又得到

$$v=\mp b\int\frac{\sqrt{E}\,/G}{\sqrt{1-b^2}\;G}\,du+C, \tag{16.28}$$

它就是曲面(16.24)的测地綫的方程。

**习题 3** 对于滿足(16.25)而形式如(16.26)的解,討論一下条件(16.22)成立与否的情形。

**习题 4** 求下列各曲面[$(u, v)$是参变数]的测地綫。

(a) $(x, y, z)=\{\operatorname{ch} u\cdot\cos v,\ \operatorname{ch} u\cdot\sin v,\ u\}$

$$\left(\operatorname{ch} u=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})\right)\text{(回轉 Catulon 曲面)}.$$

(b) $(x, y, z)=\{v\cos u,\ v\sin u,\ u\}$ (螺旋面).

(c) $x=\pm a\sqrt{(u-a^2)(v-a^2)\ /\ (b^2-a^2)(c^2-a^2)}$,

$y=\pm b\sqrt{(u-b^2)(v-b^2)\ /\ (c^2-b^2)(a^2-b^2)}$,

$z=\pm c\sqrt{(u-c^2)(v-c^2)\ /\ (a^2-c^2)(b^2-c^2)}$

$(c^2<v<b^2<u<a^2)$

$$\left(\text{椭圆面}\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right).$$

## §17 初始值問題的解的唯一性

**1. Haar 不等式** 在§11及§12中,我們假設了一阶偏微分方程的解至少二次連續可微,并在这样的假設下討論了初始值問題。但是,当初始条件是二次連續可微时,除了二次連續可微的解以外,是否还存在着一次連續可微的解呢?对于这个理論性的問題,A. Haar 指出,仅在假設解是一次連續可微的条件下能証明滿足已給初始条件的解是唯一的。

首先設独立变数中有一个是时間变数,并把它記作$x$,而其余的独立变数是$y=(y_1, \cdots, y_m)$。我們考虑基准型偏微分方程

$$\partial_x u=f(x, y, u, p_1, \cdots, p_m)\quad(p_\nu=\partial_{y_\nu}u). \tag{17.1}$$

設这个方程具有两个滿足条件"当$x=a$时,$u=\beta(y_1,\cdots,y_m)$"的解$u_1(x, y)$及$u_2(x, y)$,作它們的差$u_2-u_1=v$,則$v$所滿足的方程是

$$\partial_x v = f(x, y, u_1+v, \partial_y(u_1+v)) - f(x, y, u_1, \partial_y u_1).$$

但是另一方面，

$$\int_0^1 \partial_\theta f(x, y, u_1+\theta v, \partial_y(u_1+\theta v))d\theta$$

$$= \phi_0(x, y)v + \sum_{\mu=1}^{m} \phi_\mu(x, y)\partial_\mu v \quad (\partial_\mu = \partial_{y_\mu}),$$

这里

$$\phi_0 = \int_0^1 f_u(x, y, u_1+\theta v, \partial_y(u_1+\theta v))d\theta,$$

$$\phi_\mu = \int_0^1 f_{p_\mu}(x, y, u_1+\theta v, \partial_y(u_1+\theta v))d\theta$$

[假設 $f(x, y, u, p)$ 及 $u(x, y)$ 都是一次連續可微的]。所以在 $(x, y)$ 的适当范圍中，成立着下面的关系

$$|\partial_x v| \leqslant A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu v| + B|v|, \quad v(a, y) = 0, \qquad (17.2)$$

其中 $A$, $B$ 是正的常数。于是現在的問題化成：如果在适当的范圍内(17.2)成立的話，那么要証明在这个范圍内 $v(x, y)=0$. 为了証明这个事实，Haar 首先証明了下面的定理。

**定理 17.1** 設在范圍 $D=\{(x, y);\ 0\leqslant x,\ |y_\mu|\leqslant l-Ax\}$ 内 $v(x, y)$ 連續可微，并且下列条件成立：

$$|v(0, y)| < M, \qquad (17.3)$$

$$|\partial_x v| < A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu v| + B|v| + C \quad (A, B, C \geqslant 0), \quad (17.4)$$

那么在整个 $D$ 内，就成立着下面的关系

$$|v(x, y)| < Me^{Bx} + \frac{C}{B}(e^{Bx}-1). \qquad (17.5)$$

**証明** 現在令

$$v = e^{Bx}w + \frac{C}{B}(e^{Bx}-1), \qquad (17.6)$$

于是只要証明在 $D$ 中 $|w| < M$ 即可。首先，由(17.4)及(17.6)有

$$|\partial_x w+Bw+C|<A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu w|+B\left|w+\frac{C}{B}(1-e^{-Bx})\right|+Ce^{-Bx},$$

即在$D$中有

$$\partial_x w+Bw<A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu w|+B|w|. \tag{17.7}$$

又由(17.3)及(17.6)有

$$w(0,\ y)<M. \tag{17.8}$$

但是如果$x>0$相当小，那么，由(17.8)就能有$w(x,\ y)<M$。如果現在对全部$D$中的点并不总有$w<M$，即存在着$(x,\ y)$，使得$w(x,\ y)\geqslant M$。这样，令

$$\xi=\inf\{x;\ (x,\ y)\in D,\ w(x,\ y)\geqslant M\}, \tag{17.9}$$

显然$\xi>0$。

又由(17.9)有

$$0\leqslant x<\xi,\ (x,\ y)\in D\ \text{时},\ w(x,\ y)<M. \tag{17.10}$$

此外，由于$w(x,\ y)$的連續性，还存在着这样的$\eta$，使得

$$(\xi,\ \eta)\in D,\quad w(\xi,\ \eta)=M. \tag{17.11}$$

于是設$\varepsilon_\mu=\pm1$，并且規定

当 $\partial_\mu w(\xi,\ \eta)\geqslant0$ 时，$\varepsilon_\mu=1$，

当 $\partial_\mu w(\xi,\ \eta)<0$ 时，$\varepsilon_\mu=-1$。

現在考虑空間$E^{m+1}$中一段完全落在$D$内的綫段

$$0\leqslant x\leqslant\xi,\quad y_\mu=\eta_\mu-\varepsilon_\mu A(x-\xi)=\bar{y}_\mu(x)$$
$$(\mu=1,\ \cdots,\ m).$$

設$w$沿着这一綫段的値是$\bar{w}$，并且引入記法

$$\bar{w}(x)=w(x,\ \bar{y}(x)),$$

則由(17.10)及(17.11)就有

当 $0\leqslant x<\xi$ 时，$\bar{w}(x)<M$，$\bar{w}(\xi)=M$。

即$\bar{w}'(\xi)\geqslant0$。但是另一方面，由于上面所規定的$\bar{y}(x)$，$\varepsilon_\mu$的定义，有

$$\bar{w}'(\xi)=\left(\partial_x w+\sum_{\mu=1}^{m}\partial_\mu w\bar{y}'_\mu\right)_{(x,y)=(\xi,\eta)}$$

$$=\left(\partial_x w-A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu w|\right)_{(x,y)=(\xi,\eta)}.$$

因此

$$\left(\partial_x w-A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu w|\right)_{(x,y)=(\xi,\eta)}\geqslant 0. \tag{17.12}$$

此外，由于 $w(\xi,\eta)=M=|w(\xi,\eta)|$，所以从(17.12)，我們就得到

$$(\partial_x w+Bw)_{(x,y)=(\xi,\eta)}\geqslant\left(A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu w|+B|w|\right)_{(x,y)=(\xi,\eta)}.$$

这个結果与(17.7)矛盾。矛盾发生的原因是由于作了在 $D$ 中存在着 $(x,y)$，使得 $w(x,y)>M$ 的假定而引起的。所以在全部的 $D$ 中有 $w(x,y)\leqslant M$。如果代替 $w$ 而考虑 $-w$，則有 $w(x,y)\geqslant -M$。 證毕

现在利用定理 17.1，我們可以由(17.2)来証明，在适当的范圍内 $v(x,y)=0$。

不失去問題的一般性，可以在 $(x,y)=(0,0)$ 的某一邻域来討論，所以可取 $a=0$。其次，設 $D$ 包含在这个邻域之内(即 $l$ 相当地小)。由于(17.2)，对于任意小的 $\varepsilon>0$，恒有

$$|\partial_x v|\leqslant A\sum_{\mu=1}^{m}|\partial_\mu v|+B|v|+\varepsilon,\quad |v(0,y)|<\varepsilon.$$

故根据定理 17.1，在全部的 $D$ 内有

$$|v(x,y)|\leqslant\varepsilon e^{Bx}+\frac{\varepsilon}{B}(e^{Bx}-1).$$

取 $\varepsilon\to 0$ 的极限后，就得到

$$v(x,y)=0,\quad (x,y)\in D.$$

如果取 $-x$ 代替 $x$ 来討論的話，則有下面的結果：当 $x\leqslant 0$，$|y_\mu|\leqslant l-A|x|$ 时，$v(x,y)$ 也等于 0。

**2. 一般 Cauchy 問題的解的唯一性**　令独立变数为 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，并令 $p=(p_1, \cdots, p_n)$，我們討論非基准型偏微分方程

$$F(x, u, p)=0 \quad (p_\nu=\partial_\nu u). \tag{17.13}$$

它的初始面素組 $(x, u, p)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s_1, \cdots, s_{n-1})$ 应該滿足 (17.13) 以及

$$\left| F_{p_\mu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \partial_\rho \alpha_\mu \quad {}^{\mu\downarrow 1, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right| \neq 0. \tag{17.14}$$

首先假設对

$$\bar{x}_\nu=\bar{x}_\nu(x) \quad (\nu=1, \cdots, n)$$

成立

$$\frac{D(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0, \tag{17.15}$$

則这变换把独立变数 $x$ 变成 $\bar{x}$。如果以 $\partial_\mu$ 表示对 $x_\mu$ 的微分，那么就以記号 $\bar{\partial}_\nu$ 表示对 $\bar{x}_\nu$ 的微分。再令

$$p_\mu=\partial_\mu u, \quad \bar{p}_\nu=\bar{\partial}_\nu u,$$

則有

$$p_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} \partial_\mu \bar{x}_\nu \bar{p}_\nu.$$

但是，如果令 $F(x, u, p)=\bar{F}(\bar{x}, u, \bar{p})$，那么还有

$$\bar{F}_{\bar{p}_\nu}=\sum_{\mu=1}^{n} \partial_\mu \bar{x}_\nu F_{p_\mu}. \tag{17.16}$$

另一方面，因为 $x=\alpha(s)$ 变成了 $\bar{x}=\bar{\alpha}(s)$，所以有

$$\partial_\rho \bar{\alpha}_\nu(s)=\sum_{\mu=1}^{n} \partial_\mu \bar{x}_\nu \partial_\rho \alpha_\mu(s). \tag{17.17}$$

因此，由 (17.16) 及 (17.17) 可得

$$\left| \bar{F}_{\bar{p}_\nu}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \quad \partial_\rho \bar{\alpha}_\nu \quad {}^{\nu\downarrow 1, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right|$$
$$=\frac{D(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \left| F_{p_\mu}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \partial_\rho \alpha_\mu \quad {}^{\mu\downarrow 1, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right|.$$

結果，根据 (17.14)，(17.15) 就有

$$\left| \bar{F}_{\bar{p}_\nu}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \quad \partial_\rho \bar{\alpha}_\nu \quad {}^{\nu\downarrow 1, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right| \neq 0. \tag{17.18}$$

現在任意地取 $s=s^0$，并且由于 (17.14)，不失問題的一般性，可以假設

$$\left| \partial_\rho \alpha_\mu(s^0) \quad {}^{\mu\downarrow 2, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right| \neq 0. \tag{17.19}$$

这样，我們取

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_1 + \alpha_1(\bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n), \\ x_\mu = \alpha_\mu(\bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \quad (\mu=2, \cdots, n) \end{array}\right\} \tag{17.20}$$

并令 $\bar{x}^0=(0, s_1^0, \cdots, s_{n-1}^0)$，則由(17.20)及(17.19)，就有

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)}_{\bar{x}=\bar{x}^0} = \left| \partial_\rho \alpha_\mu(s^0) \quad {}^{\mu\downarrow 2, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right| \neq 0.$$

所以利用(17.20)，就使 $\bar{x}=\bar{x}^0$ 的邻域与 $x=x^0=\alpha(s^0)$ 的某一个邻域成一对一的对应。于是 $x$ 就是 $\bar{x}$ 的連續可微的函数。从而可以把独立变数 $x$ 变成独立变数 $\bar{x}$，而 $x=\alpha(s)$ 就变为

$$\bar{x}_1 = \bar{\alpha}_1(s) \equiv 0, \ \bar{x}_{\nu+1} = \bar{\alpha}_{\nu+1}(s) \equiv s_\nu \quad (\nu=1, \cdots, n-1).$$

但是根据(17.18)有

$$\left| \bar{F}_{\bar{p}_\nu} \quad \partial_\rho \bar{\alpha}_\nu \quad {}^{\nu\downarrow 1, \cdots, n}_{\rho\to 1, \cdots, n-1} \right| = \bar{F}_{\bar{p}_1} \neq 0.$$

这样，和 $(x, u, p)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s^0)$ 邻近的面素满足与(17.13)对应的方程，即方程

$$\bar{F}(\bar{x}, u, \bar{p})=0.$$

在其中，可以把 $\bar{p}_1$ 解出，从而得到和它等价的基准型方程

$$\bar{p}_1 = f(\bar{x}, u, \bar{p}_2, \cdots, \bar{p}_n),$$

并且使初始条件变成为

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ 时}, \quad u=\beta(\bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n).$$

最后，連同前面对基准型方程所得到的結果，就証明了下面的定理。

**定理 17.2**　設 $F(x, u, p)$ 在 $(x^0, u^0, p^0)$ 的某一邻域連續可微，而面素組 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 在滿足 $(x^0, u^0, p^0)=\{\alpha, \beta, \gamma\}(s^0)$ 的某一 $s^0$ 值的邻域連續可微。此外假設(17.14)成立。这样，在 $x=x^0$ 的适当邻域，方程(17.13)含有面素組 $\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$ 的一次連續可微的解是唯一的。

**注意**　关于定理 17.2，函数 $\gamma(s)$ 无需假設微分可能性，只要是連續函数即可。

定理 17.2 仅仅断言在 $x=x^0$ 适当的邻域方程解的唯一性。但是一般不可能把这种結果扩張到解所存在的全部区域中去。譬如基准型方程（齐次綫性，$x$, $y$ 是独立变数）

$$\partial_x u = -2y\,\partial_y u \tag{17.21}$$

的一般解是 $u=f(y^{-2}-x)$（其中 $f$ 是任意函数）。这里如果規定

$$x \leq y^{-2} \text{ 时，} u(x, y)=0,$$

$$x > y^{-2} \text{ 时，} u(x, y)=c(y^{-2}-x)^{k+1} \quad (k \text{ 自然数})$$

$(c \neq 0$ 常数)，那么容易証明，$u(x, y)$ 在全平面上是方程(17.21)的 $k$ 次連續可微的解，并且滿足初始条件 $u(0, y)=0$。这就說明了对于同一初始条件，解的唯一性是限制在某一个范围中的。此外，还可采用和上面类似的，但 $u(x, y)$ 是无限次連續可微的例子。

# 第4章 两个独立变数的二阶偏微分方程和方程組

对于一阶偏微分方程，我們以常微分方程为基础，可通过特征曲綫及特征带来建立方程的积分理論。但是对于高阶的或是联立的偏微分方程，即使在方程都是綫性的簡单情形下，一般就沒有这种統一的处理方法。理由很簡单，用一句話来說，就是这时特征体可能是实的，也可能是虛的，这将由解的本質来确定。因此一般不可能通过特征体用化成常微分方程組的方法来处理問題。

虽是这样，但在两个变数的情形，問題还是容易解决，处理的方法也很簡单。过去对这方面的問題已經作过仔細研究，因此本章将就半綫性的情形作一簡单的介紹。我們的討論以双曲型方程为主，对椭圓型的情形只講解調和函数，至于其他的内容則留在后面几章詳細講。在本章中仍假設所有的函数在变数的适当区域（区域的維数等于独立变数的个数）中，具有适当次数的連續可微性；所討論的变数与函数，也并不規定它們一定是实的。

## §18 二阶半綫性方程的标准型

設 $x, y$ 为独立变数，$u$ 为 $(x, y)$ 的未知函数，考虑下列的二阶半綫性偏微分方程

$$a\partial_{xx}^2 u+2b\partial_{xy}^2 u+c\partial_{yy}^2 u=f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u), \qquad (18.1)$$

这里

$$(a, b, c)=\{a, b, c\}(x, y).$$

現在适当地选择二个函数 $\xi(x, y)$ 与 $\eta(x, y)$，并把独立变数由 $(x, y)$ 变成 $(\xi, \eta)$，則有

$$\partial_x u=\partial_\xi u\cdot\xi_x+\partial_\eta u\cdot\eta_x,\quad \partial_y u=\partial_\xi u\cdot\xi_y+\partial_\eta u\cdot\eta_y,$$

$$\partial^2_{xx}u=\partial^2_{\xi\xi}u\cdot\xi_x^2+2\partial^2_{\xi\eta}u\cdot\xi_x\eta_x+\partial^2_{\eta\eta}u\cdot\eta_x^2$$
$$+(\partial_\xi u\cdot\xi_{xx}+\partial_\eta u\cdot\eta_{xx}),$$

$$\partial^2_{xy}u=\partial^2_{\xi\xi}u\cdot\xi_x\xi_y+\partial^2_{\xi\eta}u\cdot(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+\partial^2_{\eta\eta}u\cdot\eta_x\eta_y$$
$$+(\partial_\xi u\cdot\xi_{xy}+\partial_\eta u\cdot\eta_{xy}),$$

$$\partial^2_{yy}u=\partial^2_{\xi\xi}u\cdot\xi_y^2+2\partial^2_{\xi\eta}u\cdot\xi_y\eta_y+\partial^2_{\eta\eta}u\cdot\eta_y^2$$
$$+(\partial_\xi u\cdot\xi_{yy}+\partial_\eta u\cdot\eta_{yy}).$$

于是(18.1)就变成为

$$A\partial^2_{\xi\xi}u+2B\partial^2_{\xi\eta}u+C\partial^2_{\eta\eta}u=g(\xi,\eta,u,\partial_\xi u,\partial_\eta u).\qquad(18.2)$$

现在对$(x, y)$的任意函数$\varphi$, $\psi$, 引入下面的記号

$$Q(\varphi,\psi)=a\varphi_x\psi_x+b(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+c\varphi_y\psi_y,\qquad(18.3)$$

这样就可以把$A$, $B$, $C$写成

$$A=Q(\xi,\xi),\quad B=Q(\xi,\eta),\quad C=Q(\eta,\eta).\qquad(18.4)$$

现在試适当的选擇$(x, y)$的函数$\xi$与$\eta$, 使得(18.2)的主部(即左边)化成最簡单的形状。为此, 先討論一下下列$\lambda$的二次方程

$$a\lambda^2+2b\lambda+c=0,\qquad(18.5)$$

并設$a\neq 0$. 根据(18.5)的判别式的符号可以分成三种情形进行討論。

**1. 双曲型** $ac-b^2<0$ 的情形。

这时, (18.5)具有相异的实根, 設两根为$\lambda=\lambda_1(x, y)$及$\lambda_2(x,y)$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, 則由

$$a\lambda^2+2b\lambda+c=a(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

而有

$$Q(\varphi,\varphi)=a(\varphi_x-\lambda_1\varphi_y)(\varphi_x-\lambda_2\varphi_y).\qquad(18.6)$$

于是如果設$\xi$, $\eta$分别是下列一阶偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}\xi_x-\lambda_1(x,y)\xi_y=0,\\ \eta_x-\lambda_2(x,y)\eta_y=0\end{aligned}\right\}\qquad(18.7)$$

的解，并且 $\xi_y\eta_y\neq 0$ 的話，那么由(18.7)有

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda_2)\xi_y\eta_y\neq 0, \tag{18.8}$$

故允許以 $(\xi, \eta)$ 代替 $(x, y)$ 作为独立变数，并由 (18.4)，(18.6)，(18.7)有

$$A=Q(\xi, \xi)=0, \quad C=Q(\eta, \eta)=0. \tag{18.9}$$

此外，利用 (18.7) 及 $\lambda_1+\lambda_2=-2b/a$, $\lambda_1\lambda_2=c/a$，則有

$$\begin{aligned} B=Q(\xi, \eta) &= \{a\lambda_1\lambda_2+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\}\xi_y\eta_y \\ &= 2a^{-1}\cdot(ac-b^2)\xi_y\eta_y\neq 0. \end{aligned}$$

于是由(18.2)，(18.9)就得到了标准方程

$$\partial^2_{\xi\eta}u=g_1(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u). \tag{18.10}$$

另外，如果設 $\xi=X+Y$, $\eta=X-Y$，那么还可以变成下列的形式

$$\partial^2_{XX}u-\partial^2_{YY}u=\phi(X, Y, u, \partial_X u, \partial_Y u). \tag{18.11}$$

**2. 椭圓型** $ac-b^2>0$ 的情形。

这时(18.5)无实根，两根为共軛复数。由于(18.7)中的 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 具有复数值，所以不能在实数的范圍中研究它的特征曲綫。因此有必要把独立变数当作复变数来考虑。即把原来看作实变数 $(x, y)$ 的解析正則函数 $a$, $b$, $c$ 加以扩張，考虑为复变数 $(x, y)$ 的正則函数。

設
$$\xi=X+iY, \quad \eta=X-iY \quad (i^2=-1), \tag{18.12}$$
由于 $\partial_X=\partial_\xi+\partial_\eta$, $\partial_Y=i(\partial_\xi-\partial_\eta)$，所以

$$\partial^2_{\xi\eta}u=\frac{1}{4}(\partial^2_{XX}u+\partial^2_{YY}u)=\frac{1}{4}\Delta u. \tag{18.13}$$

在上面的变换中，由于当 $(x, y)$ 是实数时，$\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 是共軛复数，所以(18.7)中的解 $\xi$, $\eta$ 也是相互共軛的。根据 (18.12) 就能知道，如果 $(x, y)$ 为实数，那么 $(X, Y)$ 也为实数。于是从(18.13)可

知用实变数变换就能得到标准方程

$$\Delta u=\phi(X, Y, u, \partial_X u, \partial_Y u). \tag{18.14}$$

**注意1**　如 $a, b, c$ 不是 $(x, y)$ 的解析正則函数，那么上面的方法将不适用。但是在这种情形中是否仍存在着实变数的变换，使得方程能化成(18.14)标准型的形状呢？这是一个难問題。(参見 Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik II 中关于 Beltrami 方程一节。)

**3．抛物型**　$ac-b^2=0$ 的情形。

(18.5)具有实的二重根 $\lambda=\lambda_1(x, y)$，故

$$Q(\varphi, \varphi)=a(\varphi_x-\lambda_1\varphi_y)^2.$$

現在令 $\xi=\xi(x, y)$ 为滿足方程

$$\xi_x-\lambda_1(x, y)\xi_y=0 \tag{18.15}$$

并且 $\xi_y\neq 0$ 的函数，則

$$A=Q(\xi, \xi)=0. \tag{18.16}$$

又因 $b=-a\lambda_1$，$c=a\lambda_1^2$，所以有

$$\begin{aligned}B=Q(\xi, \eta)&=(a\xi_x+b\xi_y)\eta_x+(b\xi_x+c\xi_y)\eta_y\\&=a(\xi_x-\lambda_1\xi_y)\eta_x-a\lambda_1(\xi_x-\lambda_1\xi_y)\eta_y,\end{aligned}$$

因而根据(18.15)，对任意的 $\eta(x, y)$，必然有

$$B=0. \tag{18.17}$$

現在选取 $\eta$，使得 $\eta_x-\lambda_1\eta_y\neq 0$，那么就有

$$\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=-\xi_y(\eta_x-\lambda_1\eta_y)\neq 0,$$

$$C=Q(\eta, \eta)=a(\eta_x-\lambda_1\eta_y)^2\neq 0,$$

于是可以代替 $(x, y)$ 而取 $(\xi, \eta)$ 为独立变数，从而由(18.2)就得到了标准方程

$$\partial^2_{\eta\eta}u=g_1(\xi, \eta, u, \partial_\xi u, \partial_\eta u). \tag{18.18}$$

**注意2**　在双曲型及抛物型的情形中，如果假定 $a, b, c$ 是 $(x, y)$ 的二次連續可微的函数，那么 $\lambda_1, \lambda_2$ 也二次連續可微，从而知道 $\xi, \eta$ 也二次連續可微。一般地說，$\xi, \eta$ 与 $a, b, c$ 具有同次数的可微性。

**注意 3** 根据 §3 中所説的特征条件，如果 $\varphi(x, y)=c$ 所决定的曲綫是方程的特征綫，那么对

$$\varphi(x, y)=c, \quad \text{必有}\ Q(\varphi, \varphi)=0.$$

因此由方程 (18.7) 的解 $\xi(x, y)$ 及 $\eta(x, y)$ 所表示的两族曲綫

$$\xi(x, y)=c, \quad \eta(x, y)=c' \quad (c, c'\ \text{任意常数})$$

都是 §3 意义下的特征曲綫。双曲型方程具有两族实特征綫。椭圆型方程不存在实特征綫，抛物型方程则仅存在一族实特征曲綫。并且标准型 (18.10) 的两族特征綫是 $\xi=c$, $\eta=c'$，而 (18.18) 的特征綫族仅为 $\eta=c$。

## §19 标准双曲型偏微分方程

I. 首先考虑一下最簡单的方程

$$\partial^2_{xy}u=0. \tag{19.1}$$

容易給出它的通解

$$u=\varphi(x)+\psi(y), \tag{19.2}$$

$\varphi(x)$, $\psi(y)$ 是任意函数。由 (19.2) 立刻就有

$$p=u_x=\varphi'(x), \quad q=u_y=\psi'(y). \tag{19.3}$$

現在我們要利用 Cauchy 条件来决定任意函数 $\varphi$, $\psi$。設 $C$ 是一条曲綫，它沒有与 $x$ 軸或 $y$ 軸平行的切綫。設在

$$\left.\begin{array}{c} C:\ (x, y)=\{X, Y\}(s), \\ u=U(s) \end{array}\right\} \tag{19.4}$$

($s$ 是曲綫的参数)，并且还給出了关于导函数 $p$, $q$ 的条件

$$\alpha(s)p+\beta(s)q=\gamma(s), \tag{19.5}$$

这里

$$\begin{vmatrix} X'(s) & Y'(s) \\ \alpha(s) & \beta(s) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{19.6}$$

那么利用 $C$ 的成带条件

$$X'(s)p+Y'(s)q=U'(s) \tag{19.7}$$

及 (19.5)，就能得到 $p=\varphi'(X)$, $q=\psi'(Y)$ [由于 (19.3) 及

(19.6)]. 另外，因为有 $\{X', Y'\}(s) \neq (0, 0)$，所以 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 除了积分常数之外可完全决定，而积分常数則由条件(19.4)决定。

**注意 1**　如果$\{X, Y, U\}(s)$是 $p+1$ 次連續可微，而$\{\alpha, \beta, \gamma\}(s)$是 $p$ 次連續可微($p \geq 0$)，那么，$\varphi(x)$，$\psi(y)$就 $p+1$ 次連續可微。

**2.** 下面考虑一下較为一般的方程

$$\partial_{xy}^2 u = f(x, y). \tag{19.8}$$

設 $u = u_1(x, y)$ 为方程(19.8)的一个特解，$\varphi(x)$，$\psi(y)$ 是任意函数，那么容易給出(19.8)的通解为

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + u_1(x, y). \tag{19.9}$$

这时，为了求滿足 Cauchy 条件(19.4)和(19.5)的解，只要先求出在 $C$ 上滿足 $(u, p, q) = (0, 0, 0)$ 的(19.8)的解 $u = u_1(x, y)$，然后再求出滿足条件(19.4)与(19.5)的 $\varphi$ 与 $\psi$ 即可。

现在用单值連續可微的函数 $g(x)$ 把曲綫 $C$ 的方程写成

$$C:\ y = g(x),\ 并且\ g'(x) \neq 0. \tag{19.10}$$

再用通过 $C$ 外一点 $(x^0, y^0)$ 的两条直綫 $x = x^0$，$y = y^0$，作成一个由直綫与 $C$ 所包圍的区域，并記作 $D(x^0, y^0)$ (图 19.1) ❶。考虑积分

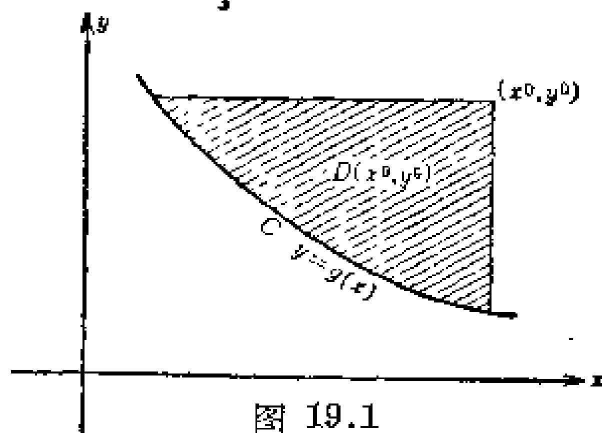



图 19.1

$$u_1(x, y) = \iint\limits_{D(x, y)} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{19.11}$$ ❶

把它写成累次积分后，有

---

❶ 原书图 19.1 中，区域 $D(x^0, y^0)$ 誤为 $D(x_0, y_0)$；在(19.11)中，积分域 $D(x, y)$ 誤为 $D(x^0, y^0)$。——校者注

$$u_1(x, y)=\int_{g^{-1}(y)}^{x}\left\{\int_{g(\xi)}^{y} f(\xi, \eta) d\eta\right\} d\xi$$
$$=\int_{g(x)}^{y}\left\{\int_{g^{-1}(\eta)}^{x} f(\xi, \eta) d\xi\right\} d\eta. \qquad (19.12)$$

于是就有

$$\partial_x u_1=\int_{g(x)}^{y} f(x, \eta) d\eta, \quad \partial_y u_1=\int_{g^{-1}(y)}^{x} f(\xi, y) d\xi,$$
$$\partial_{xy}^2 u_1=f(x, y). \qquad (19.13)$$

因此在 $C$ 上，即当 $y=g(x)$ 时，有

$$(u_1, \partial_x u_1, \partial_y u_1)=(0, 0, 0). \qquad (19.14)$$

这样就解决了(19.8) 的 Cauchy 問題。

**习題 1** 設过 $(x^0, y^0)$ 的特征綫 $x=x^0$, $y=y^0$ 与曲綫 $C$ 的交点分别为 $P, Q$。試証，(19.8) 的解 $u(x, y)$ 在 $D(x^0, y^0)$ 內部点上的值由 $(u, p, q)$ 在 $C$ 的 $\widehat{PQ}$ 弧上的值所完全决定。

3. 現在用逐次逼近法来求一般方程

$$\partial_{xy}^2 u=f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) \qquad (19.15)$$

的 Cauchy 問題的解。首先决定在 $C$ 上滿足初始条件 (19.4) 和 (19.5) 的 $\varphi(x)$ 与 $\psi(y)$。并且为了方便，对任一已給的函数 $u=u(x, y)$，引入写法

$$f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))=f[u](x, y). \quad (19.16)$$

現在設 $u_0(x, y)$ 是适当的函数(譬如 $u_0=\varphi(x)+\psi(y)$)，那么象下面这样可順次决定 $u_1(x, y), u_2(x, y), \cdots, u_n(x, y), \cdots$，即当 $u_{n-1}(x, y)$ 已知时，規定 $u_n(x, y)$ 为方程

$$\partial_{xy}^2 u=f[u_{n-1}](x, y)$$

滿足原来的初始条件的解，就是說

$$u_n(x, y)=\varphi(x)+\psi(y)+\iint_{D(x, y)} f[u_{n-1}](\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (19.17)$$

这样地决定了函数序列 $u_n(x,y)$ 后，能够証明当 $n\to\infty$ 时，$u_n(x,y)$

一致收斂于問題的解。

**証**　設 $f(x, y, u, p, q)$ 滿足下列的 Lipschitz 条件:

$$|f(x, y, \acute{u}, \acute{p}, \acute{q})-f(x, y, u, p, q)|$$
$$\leqslant L(|\acute{u}-u|+|\acute{p}-p|+|\acute{q}-q|), \qquad (19.18)$$

(假設 $f_u, f_p, f_q$ 为 $(x, y, u, p, q)$ 的連續函数卽可。) 此外为了方便起見,引入写法

$$|u(x, y)|+|\partial_x u(x, y)|+|\partial_y u(x, y)|$$
$$=(|1|+|\partial_x|+|\partial_y|)[u](x, y),$$

并令

$$\|u\|_K=\underset{(x,y)\in D_0}{\mathrm{Max}}\{(|1|+|\partial_x|+|\partial_y|)[u](x,y)$$
$$\cdot\exp(-K|x-g^{-1}(y)|-K|y-g(x)|)\} \qquad (19.19)$$

($K$ 是以后决定的正数),则 $\|u\|_K\geqslant 0$, 并且一般成立不等式:

$$(|1|+|\partial_x|+|\partial_y|)[u](x, y)$$
$$\leqslant\|u\|_K\exp(K|x-g^{-1}(y)|+K|y-g(x)|). \qquad (19.20)$$

另外,为了簡单起見,仅考慮 $g(x)$ 单調減少而点 $(x, y)$ 位于 $C$ 的右上側的情形。 至于其他位置的情形,自然可把 $x$ 或 $y$ 或两者的符号变过卽可。于是由 (19.17) 与 (19.18) 有

$$|(u_{n+1}-u_n)|_{(x,y)}\leqslant\iint_{D(x,y)}|f[u_n]-f[u_{n-1}]|_{(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$
$$\leqslant\iint_{D(x,y)}L\cdot(|1|+|\partial_x|+|\partial_y|)[u_n-u_{n-1}](\xi, \eta)d\xi d\eta.$$

而由 (19.20) (利用 $g(x)$ 的单調性) 有

$$|u_{n+1}-u_n|_{(x,y)}$$
$$\leqslant L\|u_n-u_{n-1}\|_K\cdot\iint_{D(x,y)}\exp(K|\xi-g^{-1}(\eta)|+K|\eta-g(\xi)|)d\xi d\eta$$
$$\leqslant LK^{-2}\|u_n-u_{n-1}\|_K\exp(K|x-g^{-1}(y)|+K|y-g(x)|),$$

又有

$$|\partial_x(u_{n+1}-u_n)|_{(x,y)} \leqslant \int_{g(x)}^{y} |f[u_n]-f[u_{n-1}]|_{(x,\eta)} d\eta$$

$$\leqslant \int_{g(x)}^{y} L\|u_n-u_{n-1}\|_K \exp(K|x-g^{-1}(y)|+K|\eta-g(x)|)d\eta$$

$$\leqslant LK^{-1}\|u_n-u_{n-1}\|_K \exp(K|x-g^{-1}(y)|+K|y-g(x)|),$$

同样地有

$$|\partial_y(u_{n+1}-u_n)| \leqslant LK^{-1}\|u_n-u_{n-1}\|_K \exp(K|x-g^{-1}(y)| + K|y-g(x)|).$$

把这些不等式相加起来,并根据(19.19)就有

$$\|u_{n+1}-u_n\|_K \leqslant L(K^{-2}+2K^{-1})\|u_n-u_{n-1}\|_K. \qquad (19.21)$$

现在这样地决定 $K$，使得 $L(K^{-2}+2K^{-1}) \leqslant 1/2$，那么对于一切满足 $n'>n$ 的自然数对 $n'$，$n$，由(19.21)能够得到

$$\|u_{n'}-u_n\|_K \leqslant \sum_{\nu=n}^{n'-1} \|u_{\nu+1}-u_\nu\|_K \leqslant \sum_{\nu=n}^{n'-1} 2^{-\nu}\|u_1-u_0\|_K$$

$$\leqslant 2^{1-n}\|u_1-u_0\|_K. \qquad (19.22)$$

由(19.20)与(19.22)就能知道,当 $n\to\infty$ 时，$u_n(x,y)$，$\partial_x u_n(x,y)$，$\partial_y u_n(x,y)$ 都一致收敛。如果令

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = u(x,y),$$

那么当 $n\to\infty$ 时,根据方程(19.17)的极限情形,应当有

$$u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{D(x,y)} f[u](\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (19.23)$$

証毕

此外,还可以証明满足已知初始条件的解的唯一性。設 $u(x,y)$ 与 $u'(x,y)$ 为两个满足相同初始条件的解，由于两者都应該满足(19.23),所以它們的差满足

$$u'(x,y) - u(x,y) = \iint_{D(x,y)} (f[u'] - f[u])(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (19.24)$$

用与上面同样的証明方法,能得

$$\|u'-u\|_K \leqslant L(K^{-2}+2K^{-1})\|u'-u\|_K.$$

因为 $L(K^{-2}+2K^{-1})\leqslant 1/2$，所以必然有

$$\|u'-u\|_K=0,$$

即

$$u'(x, y)=u(x, y).$$

**注意 2**　上面所說的种种事实，只要假設 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 連續可微，$f(x, y, u, p, q)$ 連續并且滿足条件 (19.18) 就能成立[适当地限制 $(x, y)$ 的变域]。于是对于解 $u$ 来說，$\partial_x u$，$\partial_y u$，$\partial^2_{xy}u$ 都是連續的。但是仅凭这些假設不能証明 $\partial^2_{xx}u$，$\partial^2_{yy}u$ 的存在性。这样将对独立变数的变换非常不利。为此我們需要假設 $f(x, y, u, p, q)$ 一次連續可微，$\varphi(x)$，$\psi(y)$ 二次連續可微。事实上，令

$$p=\partial_x u,\quad q=\partial_y u$$

后，显然 $\partial_y u$，$\partial_y p(=\partial^2_{xy}u)$ 对于 $(x, y)$ 是連續的。至于 $q$，如以 $x$ 为独立变数，它本身为未知函数，$y$ 为参数，則将滿足常微分方程

$$\frac{d}{dx}q=F(x, q, y), \tag{19.25}$$

这里

$$F(x, q, y)=f(x, y, u(x, y), p(x, y), q),$$

并且以"$x=g^{-1}(y)$ 时，$q=\psi'(y)$"为初始条件。由于 $F(x, q, y)$，$F_q(x, q, y)$，$F_y(x, q, y)$ 連續，所以 $\partial_y q(x, y)$ 連續，即 $\partial^2_{yy}u$ 連續。同样地能够証明 $\partial^2_{xx}u$ 的連續性。

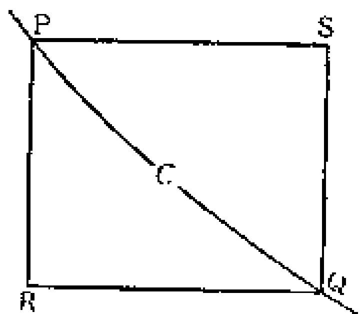



图 19.2

**注意 3**　把本节中所講的方法与习题 1 联合起来考虑，能得到下面的結果：設在曲綫 $C$ 上任取 P，Q 两点，过这两点分別作特征綫(与 $x$ 軸及与 $y$ 軸平行的直綫)，則特征綫圍成矩形 PRQS (图 19.2)。$u$ 在矩形內任一点处的值，能被 $(u, p, q)$ 在 $C$ 的 $\widehat{PQ}$ 弧上的値所唯一决定。在这种意义下，我們叫矩形为弧 $\widehat{PQ}$ 的**决定区域**。

其次，在本节中所获得的一切結果，几乎全部能推广到主部相等的联立方程組

$$\partial^2_{xy}u_i=f_i(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)\quad (i=1, \cdots, m),$$

$$u=(u_1, \cdots, u_m)$$

的情形。

**习題 2** 对方程

$$\partial_{xx}^2 u-\partial_{yy}^2 u=f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)$$

証明下面的事实：如果 $f(x, y, u, p, q)$ 一次連續可微，而 $\alpha(y)$ 二次、$\beta(y)$ 一次連續可微，則初始条件"$x=a$ 时，$u=\alpha(y)$，$u_x=\beta(y)$"决定方程的解。此外，对直綫 $x=a$ 上的区間 $b<y<c$，找出解的决定区域。

**习題 3** 試証，代替 Cauchy 条件 (19.4)，(19.5)，如果取条件为：$x=a$ 时，$u=\psi(y)$；$y=b$ 时，$u=\varphi(x)$，則这样也能决定方程 (19.8) 的解。这里假設 $\varphi, \psi$ 連續可微，$\psi(b)=\varphi(a)$，$f(x, y, u, p, q)$ 連續并滿足条件 (19.18)。

## § 20 調 和 函 数

現在考虑椭圓型方程最簡单的情形，就是 Laplace 方程

$$\Delta u=\partial_{xx}^2 u+\partial_{yy}^2 u=0. \tag{20.1}$$

这个方程的解叫**調和函数**。形式的来計算，可用

$$x+iy=\xi, \quad x-iy=\eta \quad (i^2=-1)$$

作变数变换，从而把 (20.1) 变成

$$\partial_{\xi\eta}^2 u=0,$$

于是就得到 (20.1) 的通解，即

$$u=\varphi(x+iy)+\psi(x-iy). \tag{20.2}$$

当把函数考虑为复独立变数的可微函数时，这种計算方法完全有效。为了使得对应于实的 $x, y$，函数 $u$ 恒具有实数値，我們可在 (20.2) 中令 $\psi(x-iy)=\bar{\varphi}(x+iy)$（$\bar{\varphi}$ 为 $\varphi$ 的共軛数），这样就有 $u=\Re\{2\varphi(x+iy)\}$，即調和函数是复变数 $x+iy$ 的正則函数的实部。

上面的推导并不太严密。正确的說法如下：存在着以 $u(x, y)$ 为实部的 $x+iy$ 的正則函数 $u+iv$（任意次可微）这个事实，等价于存在着滿足 Cauchy-Riemann 方程

$$v_y = u_x, \quad v_x = -u_y \tag{20.3}$$

的函数 $v$ 这个事实。因此对 $u(x, y)$ 必有条件

$$\partial_x(u_x) = \partial_y(-u_y),$$

这样可以看出，$u$ 为方程(20.1)的解这个事实，与存在着以 $u$ 为实部的 $x+iy$ 的正則函数这个事实是等价的。

由于这个結果，我們能够导出調和函数的下列性質：

（i）在定义域内部任作一圆，则函数在圓心处的値等于它在圓周上的値的均値。

（ii）除了函数恒等于常数的情形以外，它不能在定义域的内点上取极大或极小値。

（iii）在定义域任意一内点 $(x^0, y^0)$ 的近傍，它可以展开成为 $x-x^0, y-y^0$ 的广义絕对一致收斂的二重冪級数(解析正則性)。

（iv）如两个調和函数在定义域的一部分上相等，那么无論这部分多小，只要含有内点，則两函数在所有包含这部分的連通区域上是一致的。

（v）如果对独立变数施以保角变换，則調和函数仍然变成調和函数。

对于双曲型方程

$$\partial_{xx}^2 u - \partial_{yy}^2 u = 0$$

的解，代替(i)而有下面的特殊性質：

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) = u(x, y+h) + u(x, y-h),$$

这里的 $h$ 是充分小的数。但是这种解不具有象(iii)，(iv)那种有关正則性的性質。

此外，在考虑 Laplace 方程(20.1)的始值問題：

$$x=0 \text{ 时}, \quad u = \varphi(y), \quad u_x = \psi(y)$$

的时候，如果假設 $\psi(y) \equiv 0$，而 $\varphi(y)$ 不是解析正則函数，則解将不存在。什么道理呢？譬如对 $x \geqslant 0$ 所定的 $u(x, y)$，我們規定当

$x<0$ 时,

$$u(-x,y)=u(x,y),$$

由于 $u$ 在离 $x=0$ 相当远的两侧处都是調和函数,所以 $u(0,y)=\varphi(y)$ 非是 $y$ 的解析正則函数不可。(这里假定了 $u$ 当 $x\geqslant 0$ 时二次連續可微,事实上只要假設 $u$ 一次連續可微就够了。)

考慮下面关于方程 (20.1) 的边值問題:在单位圓 $x^2+y^2=1$ 上給定任意的連續函数,求在圓上取这个値而在圓内 $x^2+y^2<1$ 是調和的函数(在閉圓 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上它是連續的)。这样的函数恒是存在的。我們利用极坐标

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

并設圓周上已給的連續函数为 $g(\theta)$ (但 $g(\theta+2\pi)=g(\theta)$),那么解可表为 **Poisson 积分**

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)g(\varphi)}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi. \tag{20.4}$$

公式 (20.4) 可以根据調和函数的性质 (i) 及 (v) 导出。設 $z=x+iy$ 是 $|z|<1$ 中固定一点,考慮把 $\zeta$ 变到 $\zeta'$ 的变换

$$\zeta'=\frac{\zeta-z}{\bar{z}\zeta-1}, \tag{20.5}$$

这个变换作成了单位圓 $|\zeta|\leqslant 1$ 与单位圓 $|\zeta'|\leqslant 1$ 之間一一对应的保角映象,并把 $\zeta=z$ 变成 $\zeta'=0$. 假設圓周上的对应关系是

$$\zeta=e^{i\varphi}\Leftrightarrow\zeta'=e^{i\sigma}, \tag{20.6}$$

令 $g(\varphi)=\tilde{g}(\sigma)$,則由 (i) 有

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{g}(\sigma)d\sigma. \tag{20.7}$$

由 (20.5) 与 (20.6) 有

$$e^{i\sigma}=\frac{e^{i\varphi}-z}{\bar{z}e^{i\varphi}-1}, \tag{20.8}$$

两边微分后,有

$$ie^{i\sigma}d\sigma=\left\{\frac{ie^{i\varphi}}{\bar{z}e^{i\varphi}-1}-\frac{(e^{i\varphi}-z)\bar{z}ie^{i\varphi}}{(\bar{z}e^{i\varphi}-1)^2}\right\}d\varphi.$$

于是由(20.8)，取 $z=re^{i\theta}$ 后，则有

$$d\sigma=\left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z}-\frac{\bar{z}e^{i\varphi}}{\bar{z}e^{i\varphi}-1}\right)d\varphi$$

$$=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi. \qquad (20.9)$$

由(20.7)，(20.9)以及 $\tilde{g}(\sigma)=g(\varphi)$，就得到了(20.4)。

反过来，設 $g(\theta)$ 是任意一个以 $2\pi$ 为周期的連續函数，由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z}-\frac{ze^{-i\varphi}}{ze^{-i\varphi}-1}\right)g(\varphi)d\varphi$$

是在 $|z|<1$ 内关于 $z$ 的正則函数，所以它的实部

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z}-\frac{\bar{z}e^{i\varphi}}{\bar{z}e^{i\varphi}-1}\right)g(\varphi)d\varphi,$$

即(20.4)(見(20.9))是在 $|z|<1$ 内关于 $(x, y)$ 的調和函数。余下只要証明当 $r\to 1(r<1)$ 时，$u\to g(\theta)$ 即可。为了方便起見，令

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=K(r, \theta) \quad (0\leqslant r<1),$$

则(20.4)可以写成

$$u=\int_{-\pi}^{\pi}K(r, \varphi-\theta)g(\varphi)d\varphi. \qquad (20.10)$$

由于当 $u\equiv 1$ 时，(20.4)应該成立，所以有

$$\int_{-\pi}^{\pi}K(r, \varphi-\theta)d\varphi=1, \qquad (20.11)$$

从而由(20.10)可以得到

$$u-g(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}K(r, \varphi-\theta)\{g(\varphi)-g(\theta)\}d\varphi. \qquad (20.12)$$

因此，現在只需証明当 $r\to 1$ 时，上式的右边收斂于0即可。因为 $g(\varphi)$ 是連續的，所以对已知的任意小的正数 $\varepsilon$，可选择相当小

的 $\delta>0$，使得

$$|\varphi-\theta|<\delta \text{ 时}, \quad |g(\varphi)-g(\theta)|<\varepsilon. \tag{20.13}$$

于是由 $K(r, \varphi-\theta)>0$ 及 (20.12) 有

$$|u-g(\theta)|\leqslant\left\{\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}+\int_{-\pi}^{-\delta}\right\}K(r, \varphi-\theta) \cdot |g(\varphi)-g(\theta)|d\varphi, \tag{20.14}$$

再由 (20.11) 与 (20.13) 有

$$\int_{-\delta}^{\delta}K(r, \varphi-\theta)|g(\varphi)-g(\theta)|d\varphi <\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}K(r, \varphi-\theta)d\varphi=\varepsilon. \tag{20.15}$$

又当 $\delta<|\varphi-\theta|\leqslant\pi$ 时，有

$$K(r, \varphi-\theta)<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{2r(1-\cos\delta)}. \tag{20.16}$$

另外还存在着 $M$，使得 $|g(\varphi)-g(\theta)|\leqslant M$，所以由 (20.16) 有

$$\left\{\int_{\delta}^{\pi}+\int_{-\pi}^{-\delta}\right\}K(r, \varphi-\theta)|g(\varphi)-g(\theta)|d\varphi <\frac{1-r^2}{2r(1-\cos\delta)}M. \tag{20.17}$$

这样由 (20.14), (20.15), (20.17) 就有

$$|u-g(\theta)|<\varepsilon+\frac{1-r^2}{2r(1-\cos\delta)}M.$$

当 $r$ 相当地接近 1 时，$M(1-r^2)/2r(1-\cos\delta)<\varepsilon$，所以

$$|u-g(\theta)|<2\varepsilon \quad (\varepsilon>0 \text{ 任意小}).$$

于是証明了当 $r\to1$ 时，$u\to g(\theta)$。

## § 21 一阶半綫性偏微分方程組

**1. 变到标准型的变换** 設 $x, y$ 是独立变数，$u_1, \cdots, u_m$ 是 $(x, y)$ 的未知函数，我們考虑联立方程組

$$\partial_x u_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y)\partial_y u_j + f_i(x, y, u), \tag{21.1}$$

$$u = (u_1, \cdots, u_m) \quad (i=1, \cdots, m).$$

从形式上来說，卽使对于更一般的联立方程組

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, y)\partial_x u_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x, y)\partial_y u_j = c_i(x, y, u), \tag{21.2}$$

如果对 $\partial_x u$ 的系数，成立着条件

$$\left| a_{ij}(x, y) \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m} \right| \neq 0,$$

那么由(21.2)解出 $\partial_x u_i$ 后，就化成了(21.1)的形状。为了使方程組(21.1)的主部更进一步的簡化，可适当选擇函数 $\alpha_{ij}(x,y)$，并令

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(x, y) v_j, \tag{21.3}$$

这里还假設

$$\left| \alpha_{ij} \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m} \right| \neq 0, \tag{21.4}$$

于是有

$$\partial_x u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\partial_x v_j + \sum_{j=1}^{m} \partial_x \alpha_{ij} \cdot v_j,$$

$$\partial_y u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\partial_y v_j + \sum_{j=1}^{m} \partial_y \alpha_{ij} \cdot v_j,$$

从而由(21.1)就得到

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\partial_x v_j = \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\alpha_{jk} \right) \partial_y v_k + \phi_i(x, y, v), \tag{21.5}$$

这里

$$\phi_i = f_i + \sum_{k=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\partial_y \alpha_{jk} - \partial_x \alpha_{ik} \right) v_k.$$

在(21.5)中解出 $\partial_x v_j$ 后，能得到具有下面形状的方程組

$$\partial_x v_j = \sum_{k=1}^{m} B_{jk}(x, y)\partial_y v_k + g_j(x, y, v). \tag{21.6}$$

比較(21.5)与(21.6)，就有

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} B_{jk} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \alpha_{jk}. \qquad (21.7)$$

适当地选擇 $\alpha_{ij}$，就可以認为 $(B_{jk})$ 是仅具主对角綫部分的矩陣，即

$$B_{kk} = \lambda_k, \text{ 当 } j \neq k \text{ 时}, \ B_{jk} = 0.$$

这样，(21.7)就成为

$$\sum_{j=1}^{m} (A_{ij} - \lambda_k) \alpha_{jk} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i = 1, \cdots, m \\ k = 1, \cdots, m \end{matrix} \right). \qquad (21.8)$$

方程組(21.8)存在着滿足条件

$$(\alpha_{1k}, \cdots, \alpha_{mk}) \neq (0, \cdots, 0) \qquad (21.9)$$

的解的充要条件为，$\lambda = \lambda_k$ 是下列关于 $\lambda$ 的 $m$ 次方程

$$\left| A_{ij}(x, y) - \lambda \delta_{ij} \quad {}^{i=1, \cdots, m}_{j=1, \cdots, m} \right| = 0 \qquad (21.10)$$

的根。就是說，它是矩陣 $(A_{ij})$ 的本征值。此外，設(21.10)的根都是相异的(不限定是实的)，令其为

$$\lambda_1(x, y), \cdots, \lambda_m(x, y),$$

这时，对于滿足(21.8)，(21.9)的 $\alpha_{jk}$，(21.4)必然成立。所以利用变換(21.3)，就可以把(21.1)变成为标准型方程

$$\partial_x v_i = \lambda_i(x, y) \partial_y v_i + g_i(x, y, v) \quad (i = 1, \cdots, m). \qquad (21.11)$$

用实数值的变换能够变成标准型方程的方程組(21.1)叫做**双曲型方程**。如果(21.10)的 $m$ 个根是相异的实数，那么(21.1)显然属于双曲型。这时，把这种方程組特別叫做**狹义双曲型的**。当(21.10)不含有实根时，就叫方程組(21.1)为**椭圓型的**。

**注意** 当 $(A_{ij})$ 具有相异的本征値时，$\lambda_i(x, y)$ 与 $A_{ij}(x, y)$ 将有同程度的正則性($p$ 次連續可微，或解析正則)。这时可取 $\alpha_{jk}$ 为行列式 $|A_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}|$ 对应于元素 $A_{ij} - \lambda_k \delta_{ij}$ 的余因子(适当选擇 $i$)。这就說明了 $\alpha_{jk}(x, y)$ 与 $A_{ij}(x, y)$ 也具有同程度的正則性。特別如 $A_{ij}(x, y)$ 二次連續可微，$f_i(x, y, u)$

一次連續可微，那么 $\lambda_i(x, y)$ 也就二次連續可微，$g_i(x, y, v)$ 一次連續可微。但是，如果 $f_i$ 二次連續可微时，$g_i$ 却不一定二次連續可微。

上面仅討論了(21.10)不具有等根的情形。对等根的情形，請参看 Petrovski: Lectures on partial differential equations, p. 53.

**2．关于椭圓型的情形**　如果(21.10)有一个不是实的根，那么它就有一对共軛复根。与复根对应的 $\alpha_{jk}$ 也成为共軛复数。这就是說，如以 $\lambda_k$ 及 $\bar{\lambda}_k$ 表示(20.10)的一对共軛根，那么就存在着一对完全成共軛的标准方程，即

$$\partial_x w_k=\lambda_k\partial_y w_k+f_k,\quad \partial_x\bar{w}_k=\bar{\lambda}_k\partial_y\bar{w}_k+\bar{f}_k. \tag{21.12}$$

如方程(21.10)无重根，那么椭圓型方程組就能变成 $l$ 对($m=2l$)形状如(21.12)的方程。

特别对 $m=2$ 的情形，如果 $A_{ij}(x, y)$ 是实变数$(x,y)$的解析正則函数，由于这时它的本征值 $\lambda(x, y)$ 也是解析正則的，所以可令

$$\lambda(x, y)=\alpha(x, y)+i\beta(x, y)\quad (i^2=-1). \tag{21.13}$$

(有时还能把 $\alpha$, $\beta$ 拓广为复变数 $(x, y)$ 的正則函数来考虑。) 这样，滿足一阶綫性偏微分方程

$$\zeta_x-\lambda(x, y)\zeta_y=0, \tag{21.14}$$

而且 $\zeta_y\neq 0$ 的解就可写成

$$\zeta=\xi(x, y)+i\eta(x, y)\quad (i^2=-1).$$

(当 $x$, $y$ 是实数时，則 $\xi$, $\eta$ 也是实的。) 依照(21.13)把(21.14)分为实部与虚部后，就得到

$$\left.\begin{aligned}\xi_x-\alpha\xi_y&=-\beta\eta_y,\\ \eta_x-\alpha\eta_y&=\beta\xi_y.\end{aligned}\right\} \tag{21.15}$$

从这里就知道，当 $\beta\neq 0$ 时，

$$\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}=-\beta(\xi_y^2+\eta_y^2)=-\beta|\zeta_y|^2\neq 0.$$

因此可以用$(\xi, \eta)$代替$(x, y)$作为独立变数(实变换)，再設

$$w=u+iv,\ f=g+ih \quad (i^2=-1). \tag{21.16}$$

因为

$$\partial_x w=(\xi_x\partial_\xi+\eta_x\partial_\eta)(u+iv),$$
$$\partial_y w=(\xi_y\partial_\xi+\eta_y\partial_\eta)(u+iv),$$

所以把(21.12)分为实部与虚部后，就有

$$-\eta_y(\partial_\xi u-\partial_\eta v)+\xi_y(\partial_\xi v+\partial_\eta u)=g/\beta,$$
$$-\xi_y(\partial_\xi u-\partial_\eta v)-\eta_y(\partial_\xi v+\partial_\eta u)=h/\beta.$$

最后就得到了主部与 Cauchy-Riemann 方程一样的方程組

$$\left.\begin{aligned}\partial_\xi u-\partial_\eta v&=-(\eta_y g+\xi_y h)/\beta(\xi_y^2+\eta_y^2),\\ \partial_\xi v+\partial_\eta u&=(\xi_y g+\eta_y h)/\beta(\xi_y^2+\eta_y^2).\end{aligned}\right\} \tag{21.17}$$

**3. 特征曲綫** 設 $\varphi(x, y)=0$ 是在 § 3 意义下的方程 (21.1) 的特征曲綫(一維的特征面)。如果再設 $\varphi_y\neq 0$，則曲綫方程也可以写成 $y=y(x)$。現在由 $\varphi(x, y(x))=0$，有 $(\varphi_x+\varphi_y y')_{y=y(x)}=0$，所以有

$$\left|\delta_{ij}\varphi_x-A_{ij}\varphi_y \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m}\right|=\left|-(\delta_{ij}y'+A_{ij})\varphi_y \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m}\right|$$

$$=(-\varphi_y)^m\left|\delta_{ij}y'+A_{ij} \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m}\right|.$$

因为 $y=y(x)$ 是(21.1)的特征曲綫，所以必定有

$$\left|\delta_{ij}y'+A_{ij} \quad {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m}\right|=0. \tag{21.18}$$

設 $(A_{ij})$ 的本征值是 $\lambda_1(x, y), \cdots, \lambda_m(x, y)$，这样，$y=y(x)$ 为特征曲綫的事实，就等价于 $y=y(x)$ 滿足下列方程

$$(y'+\lambda_1(x, y))\cdots(y'+\lambda_m(x, y))=0.$$

因此(21.1)特征綫的全体，就是 $m$ 个方程的方程組

$$\frac{dy}{dx}=-\lambda_i(x, y) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{21.19}$$

的解的曲綫族(对每个 $i$ 可分别加以考虑)的全体。

此外，对于二阶半綫性方程

$$a(x, y)\partial_{xx}^2 u+2b(x, y)\partial_{xy}^2 u+c(x, y)\partial_{yy}^2 u$$
$$=f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u), \tag{21.20}$$

如令

$$\partial_x u=p, \quad \partial_y u=q,$$

則

$$\partial_x q=\partial_{xy}^2 u=\partial_y p, \ \partial_{yy}^2 u=\partial_y q,$$

因而就能把它变成关于$(u, p, q)$的联立一阶半綫性方程組

$$\begin{cases}\partial_x u=p,\\ \partial_x p=-2\dfrac{b}{a}\partial_y p-\dfrac{c}{a}\partial_y q+\dfrac{1}{a}f(x, y, u, p, q),\\ \partial_x q=\partial_y p.\end{cases} \tag{21.21}$$

設$(u, p, q)=(u_1, u_2, u_3)$，并取

$$A_{1j}=A_{i1}=0 \ (i, j=1, 2, 3), \ A_{33}=0,$$
$$A_{22}=-2b/a, \ A_{23}=-c/a, \ A_{32}=1,$$

显然(21.21)属于(21.1)的形狀，它的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2b/a & -c/a\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{a}\lambda(a^2\lambda^2+2b\lambda+c)=0. \tag{21.22}$$

如果$ac-b^2<0$，那么方程(21.22)的根是$\lambda=0$以及两个相异的实根$\lambda_1$与$\lambda_2$。因为(21.21)中的第一式的主部与第二，第三两式的主部无关，所以可对第二，第三两式施以实变换使之化成标准型方程。这时我們說(21.20)是双曲型的。这个定义与§18中的定义完全一致。此外关于特征綫，則除了对应于$\lambda=0$（即$y=$常数)的那一組以外，也与§18中所給的一致。

如果$ac-b^2>0$，那么除去$y=$常数的一組以外，沒有实的特征綫了。这时把(21.21)中的第一式除外，方程組其余的部分相

当于 §18 中所定义的椭圆型。

下面我們驗証一下特征条件对于方程变换的不变性。設下面是关于 $m$ 个独立变数 $x=(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $l$ 个未知函数 $u=(u_1, \cdots, u_l)$ 的半綫性方程組

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m} a_{ij\mu}(x)\partial_\mu u_j = b_i(x, u) \quad (i=1, \cdots, l). \tag{21.23}$$

又 $\varphi(x)=0$ 所代表的曲面滿足特征条件

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m} a_{ij\mu}\partial_\mu\phi \quad {}^{i\downarrow 1, \cdots, l}_{j\to 1, \cdots, l}\right| = 0. \tag{21.24}$$

再設方程組的綫性組合的变换

$$\sum \gamma_{ki} a_{ij\mu} = a'_{kj\mu}, \quad \sum \gamma_{ki} b_i = b'_k,$$

把(21.23)变成

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m} a'_{kj\mu}(x)\partial_\mu u_j = b'_k(x, u) \quad (k=1, \cdots, l),$$

則由于

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m} a'_{kj\mu}\partial_\mu\phi \quad {}^{k\downarrow 1, \cdots, l}_{j\to 1, \cdots, l}\right|$$

$$= \left|\gamma_{ki} \quad {}^{k\downarrow 1, \cdots, l}_{i\to 1, \cdots, l}\right| \cdot \left|\sum_{\mu=1}^{m} a_{ij\mu}\partial_\mu\phi \quad {}^{i\downarrow 1, \cdots, l}_{j\to 1, \cdots, l}\right|,$$

可見特征条件对变换显然是不变的。

其次，設未知函数間的綫性組合的变换

$$u_i = \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij}(x) v_j$$

把方程(21.23)变成了

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{m} \tilde{a}_{ik\mu}(x)\partial_\mu v_k = \tilde{b}_i(x, v) \quad (i=1, \cdots, l),$$

則由于

$$\tilde{a}_{ik\mu} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij\mu}\,\alpha_{jk},$$

所以

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}\bar{a}_{ik\mu}\partial_\mu\phi \quad \begin{matrix} i\downarrow 1,\cdots,l \\ k\to 1,\cdots,l\end{matrix}\right|$$

$$=\left|\sum_{\mu=1}^{m}a_{ij\mu}\partial_\mu\phi \quad \begin{matrix} i\downarrow 1,\cdots,l \\ j\to 1,\cdots,l\end{matrix}\right|\cdot\left|\alpha_{jk} \quad \begin{matrix} j\downarrow 1,\cdots,l \\ k\to 1,\cdots,l\end{matrix}\right|,$$

这样就証明了对未知函数間的变換，特征条件也是不变的。

最后，如果当独立变数由$(x)$变成$(x')$时，(21.23)变成

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{m}\bar{a}_{ij\nu}(x')\partial'_\nu u_j=\bar{b}_i(x',u)\quad (i=1,\cdots,l),$$

則由于

$$\bar{a}_{ij\nu}=\sum_{\mu=1}^{m}a_{ij\mu}\partial_\mu x'_\nu,\quad \partial_\mu\phi=\sum_{\nu=1}^{m}\partial'_\nu\phi\partial_\mu x'_\nu,$$

所以

$$\sum_{\mu=1}^{m}a_{ij\mu}\partial_\mu\phi=\sum_{\nu=1}^{m}\bar{a}_{ij\nu}\partial'_\nu\phi.$$

这表示，特征条件仍是不变的。

**习题1**　把下列的联立方程

$$\left.\begin{aligned}\partial_x u&=a(x,y)\partial_y v+g(x,y),\\ \partial_x v&=a(x,y)\partial_y u+h(x,y)\end{aligned}\right\}$$

变成标准型。特别是当$a(x,y)=\alpha(x)\beta(y)$，$\beta(y)=0$时，討論上列方程組的解法。

**习题2**　設$ac-b^2=-\mu^2<0$，把(20.21)变成标准型。

## §22　双曲型半綫性一阶方程組

**1. 逐次逼近法**　根据前节的結果，可以用实数值的变換把双曲型半綫性联立一阶方程組化成下面的标准型

$$\partial_x u_i=\lambda_i(x,y)\partial_y u_i+f_i(x,y,u),\qquad (22.1)$$

$$u=(u_1,\cdots,u_m)\quad (i=1,\cdots,m).$$

如果方程右边的$f_i$中不含$u$，那么(22.1)的每个方程对于$u_i$是独

立的一阶綫性方程，从而可以用第2章中的方法求解。当 $f_i$ 内含有 $u$ 时，可用逐次逼近法求解。为了要得到当 $x=a$ 时，$u_i=\varphi_i(y)$ 的解，可先适当的取 $u_i^{(0)}(x, y)$（譬如可取 $u_i^{(0)}=\varphi_i(y)$），并顺次地规定 $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \cdots, u_i^{(n)}$ 如下：即当 $u_i^{(n-1)}$ 已知时，令 $u_i^{(n)}$ 是微分方程

$$\partial_x u_i=\lambda_i(x, y)\partial_y u_i+f_i(x, y, u^{(n-1)}(x, y)) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{22.2}$$

满足始值条件"$x=a$ 时，$u_i=\varphi_i(y)$"的解。为了要証明当 $n\to\infty$ 时 $u_i^{(n)}$ 一致收斂于方程(22.1)的解，需要先証明下面的定理。

**定理 22.1** （假設）令 $a\leqslant x\leqslant a'$, $\alpha(x)\leqslant y\leqslant\beta(x)$ 所規定的 $(x, y)$ 区域为 $D$。这里 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 是連續可微的函数，并且分别满足下列微分不等式

$$\alpha'(x)\leqslant-\lambda(x, \alpha(x)), \quad \beta'(x)\geqslant-\lambda(x, \beta(x)), \tag{22.3}$$

其中 $\lambda, \lambda_y, f, f_y$ 是在 $D$ 中的 $(x, y)$ 的連續函数。此外存在着常数 $L$，及 $x$ 的連續函数 $g(x)$, $h(x)$，使得

$$|\lambda_y(x, y)|\leqslant L, \tag{22.4}$$

$$|f(x, y)|\leqslant g(x), \quad |f_y(x, y)|\leqslant h(x). \tag{22.5}$$

（結論）若 $\varphi(y)$ 为已知函数，它在 $\alpha(a)\leqslant y\leqslant\beta(a)$ 中連續可微，并且满足不等式

$$|\varphi(y)|\leqslant\varepsilon, \quad |\varphi'(y)|\leqslant\varepsilon', \tag{22.6}$$

則微分方程

$$\partial_x u=\lambda(x, y)\partial_y u+f(x, y) \tag{22.7}$$

具有满足初始条件 $x=a$ 时，$u=\varphi(y)$ 的解 $u=u(x, y)$（在 $D$ 中連續可微），它在 $D$ 中还满足下列的不等式：

$$|u(x, y)|\leqslant\varepsilon+\int_a^x g(\xi)d\xi \tag{22.8}$$

及

$$|\partial_y u(x, y)| \leqslant \varepsilon' e^{L(x-a)} + \int_a^x e^{L(x-\xi)} h(\xi) d\xi. \tag{22.9}$$

这个定理的証明后面再講，現在先利用它来証明 $u_i^{(n)}$ 的一致收斂性。首先設有 $m$ 个函数 $\lambda_i(x, y)$，对于它們微分不等式(22.3)已成立。此外还存在着常数 $H>0$，使得

$$|\partial_{u_j} f_i| \leqslant H. \tag{22.10}$$

現在引入常数 $K>0$(它的大小将在后面决定)，并引入符号

$$\underset{(x,y)\in D}{\mathrm{Max}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |u_i(x, y)| e^{-K(x-a)} \right\} = \|u\|_K, \tag{22.11}$$

則

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i(x, y)| \leqslant \|u\|_K e^{K(x-a)}. \tag{22.12}$$

因为 $u_i = u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}$ 是微分方程

$$\partial_x u_i = \lambda_i(x, y) \partial_y u_i + \{f_i(x, y, u^{(n)}) - f_i(x, y, u^{(n-1)})\} \tag{22.13}$$

满足初始条件"$x=a$ 时，$u_i=0$"的解，所以由 (22.10)，(22.13) 及 (22.12) 有

$$|f_i(x, y, u^{(n)}) - f_i(x, y, u^{(n-1)})| \leqslant H \sum_{j=1}^{m} |u_j^{(n)} - u_j^{(n-1)}|$$
$$\leqslant H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K e^{K(x-a)}.$$

于是由定理 22.1 (設 $\varepsilon=0$)，就有

$$|u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}| \leqslant \int_a^x H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K e^{K(\xi-a)} d\xi$$
$$< K^{-1} H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K e^{K(x-a)}.$$

再由 (22.11) 有

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_K \leqslant m K^{-1} H \|u^{(n)} - u^{(n-1)}\|_K. \tag{22.14}$$

令 $K=2mH$，根据 (22.14)，对于一切大于 $n$ 的自然数 $n'$，可以得到

$$\|u^{(n')} - u^{(n)}\|_K \leqslant \sum_{\nu=n}^{n'-1} \|u^{(\nu+1)} - u^{(\nu)}\|_K < \sum_{\nu=1}^{n'-1} 2^{-\nu} \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_K$$
$$\leqslant 2^{1-n} \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_K.$$

由此式及(22.12)，就知道当 $n\to\infty$ 时，$u_i^{(n)}(x,y)$ 在 $D$ 中一致收斂。即存在着极限函数 $u_i(x,y)$，

$$\lim_{n\to\infty} u_i^{(n)}(x,y)=u_i(x,y). \tag{22.15}$$

对于 $u_i$ 明显地有 $u_i(a,y)=\varphi_i(y)$. 但是要証明它是(22.1)的解，还需要証明 $\partial_x u_i^{(n)}$ 及 $\partial_y u_i^{(n)}$ 都是一致收斂的。关于这一点，我們在定理証明之后再来論証。

**2. 定理 22.1 的証明** (22.7)的特征曲綫是方程

$$\frac{dy}{dx}=-\lambda(x,y) \tag{22.16}$$

的解曲綫。通过 $D$ 内各点仅存在着唯一的解曲綫，見图 22.1。现在把每一条解曲綫延拓到 $D$ 的边界，它的全体就一重地复蓋着 $D$. 根据(22.3)，可以認为这些曲綫(当 $x$ 减少时)是由 $x=a$ 上的点出发的，而在 $D$ 内部延长。令在 $x=a$ 上出发的点为 $(x,y)=(a,\eta)$，則曲綫的方程可以写成

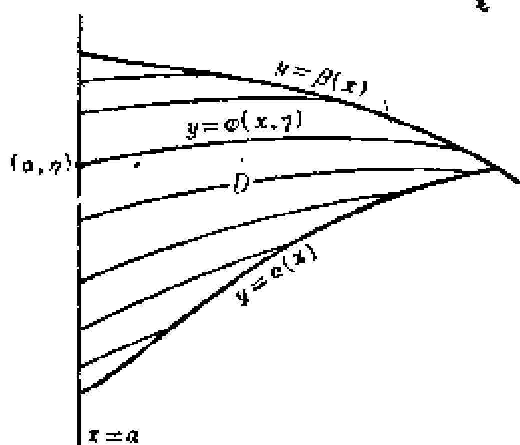


图 22.1

$$y=\varphi(x,\eta)\quad [\varphi(a,\eta)=\eta]. \tag{22.17}$$

用(22.17)能够作成 $(x,y)$ 的区域 $D$ 与 $(x,\eta)$ 的区域 $D^*$ 之間的一一对应(連續并可微)。对 $D^*$ 来說，由于(22.17)所表示的特征曲綫具有方程 $\eta=$常数，所以与它相对应的特征方程(22.16)就变成了

$$\frac{d\eta}{dx}=0.$$

但是以 $(x,\eta)$ 代替 $(x,y)$ 作为独立变数时，微分方程(22.7)成为

$$\partial_x u=f(x,\varphi(x,\eta)). \tag{22.18}$$

于是当 $x=a$ 时，满足 $u=\varphi(\eta)$ 的解是

$$u(x,\eta)=\varphi(\eta)+\int_a^x f(\xi,\varphi(\xi,\eta))d\xi. \tag{22.19}$$

由(22.5)及(22.6)有

$$|u(x,\eta)|\leqslant\varepsilon+\int_a^x g(\xi)d\xi. \tag{22.20}$$

由(22.17)把 $\eta$ 解出成为 $(x,y)$ 的函数 $(\varphi_\eta\neq0)$，并取

$$\eta=\psi(x,y), \tag{22.21}$$

因为

$$u(x,y)=u(x,\eta)_{\eta=\psi(x,y)}, \tag{22.22}$$

所以根据(22.20)可知(22.8)应該成立。

再設 $\eta$ 为常数，因为(22.17)是(22.16)的解，即有

$$\varphi_x(x,\eta)+\lambda(x,\varphi(x,\eta))=0.$$

把方程对 $\eta$ 微分，就有

$$\partial_x\varphi_\eta+\lambda_y(x,\varphi)\varphi_\eta=0.$$

但是由于 $\varphi_\eta(a,\eta)=1$，所以有

$$\varphi_\eta(x,\eta)=\exp\left\{-\int_a^x\lambda_y(\xi,\varphi(\xi,\eta))d\xi\right\}. \tag{22.23}$$

此外，由关系式(22.17)及(22.21)，所以有

$$\varphi(x,\psi(x,y))=y,$$

即

$$\varphi_\eta(x,\eta)_{\eta=\psi}\cdot\psi_y(x,y)=1.$$

于是由(22.23)而有

$$\psi_y(x,y)=\exp\left\{\int_a^x\lambda_y(\xi,\varphi(\xi,\eta))d\xi\right\}_{\eta=\psi}. \tag{22.24}$$

另由(22.19)及(22.22)有

$$\begin{aligned}\partial_y u(x,y)&=u_\eta(x,\eta)_{\eta=\psi}\cdot\psi_y(x,y)\\&=\left\{\varphi'(\eta)+\int_a^x f_y(\xi,\varphi(\xi,\eta))\cdot\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi\right\}_{\eta=\psi}\cdot\psi_y(x,y).\end{aligned} \tag{22.25}$$

再根据(22.23)及(22.24)有

$$\psi_y(x,\ y)\varphi_\eta(\xi,\ \eta)=\exp\left\{\int_\xi^x \lambda_y(t,\ \varphi(t,\ \eta))\,dt\right\},$$

所以由(22.25)有

$$u_y(x,\ y)=\left[\varphi'(\eta)\exp\left\{\int_a^x \lambda_y(\xi,\ \varphi(\xi,\ \eta))\,d\xi\right\}\right]_{\eta=\psi}$$
$$+\left[\int_a^x \exp\left\{\int_\xi^x \lambda_y(t,\ \varphi(t,\ \eta))\,dt\right\} f_y(\xi,\ \varphi(\xi,\ \eta))\,d\xi\right]_{\eta=\psi},$$

最后由(22.4)，(22.5)，(22.6)就能証明(22.9)。

**3. 导函数收斂的証明** 現在来証明 $\partial_y u_i^{(n)}$ 一致收斂。为了这个目的，先取常数 $M$，使得

$$|\varphi'(y)|\leqslant M,\quad |\partial_y f_i(x,\ y,\ u)|\leqslant M. \tag{22.26}$$

我們先証，存在着适当的常数 $K>L$，使得对于一切的 $n(\geqslant 0)$，在区域 $D$ 内成立

$$|\partial_y u_i^{(n)}(x,\ y)|\leqslant Me^{K(x-a)}. \tag{22.27}$$

这个公式当 $n=0$ 时是显然的，設(22.27)对某个自然数 $n$ 已經成立，由(22.26)就有

$$|\partial_y\{f_i(x,\ y,\ u^{(n)}(x,\ y))\}|\leqslant|\partial_y f_i|+\sum_{j=1}^m|\partial_{u_j} f_i|\cdot|\partial_y u_j^{(n)}|$$
$$\leqslant M+mHMe^{K(x-a)}\leqslant M(1+mH)e^{K(x-a)}.$$

于是由定理22.1有

$$|\partial_y u_i^{(n+1)}|\leqslant M+\int_a^x M(1+mH)e^{L(x-\xi)}e^{K(\xi-a)}d\xi$$
$$=M+M(1+mH)e^{L(x-a)}\int_a^x e^{(K-L)(\xi-a)}d\xi$$
$$<M(2+mH)(K-L)^{-1}e^{K(x-a)}.$$

取 $K=L+2+mH$ 后，立刻就能看出，如在(22.27)中以 $n+1$ 代替 $n$，則关系式仍成立。因此(22.27)对一切的自然数 $n$ 恒成立。

現在証明当 $n\to\infty$ 时，$\partial_y u^{(n)}$ 一致收斂。为此，設

$$\operatorname*{Max}_{i}\operatorname*{Max}_{(x,y)\in D}\{|\partial_y(u_i^{(n)}-u_i^{(n')})|e^{-K(x-a)}\}=\gamma_{n,n'}. \tag{22.28}$$

由于

$$|\partial_y(u_i^{(n)}-u_i^{(n')})|\leqslant\gamma_{n,n'}e^{K(x-a)}, \tag{22.29}$$

所以只要証明 $\lim\limits_{n,n'\to\infty}\gamma_{n,n'}=0$ 即可。此外由于 $\partial_y f_i$, $\partial_{u_j}f_i$ 是 $(x,y,u)$ 的連續函数，而 $u_j^{(n)}$ 是一致收斂的，所以对任意小的 $\varepsilon>0$，只要 $n,n'$ 相当大，就成立

$$\left.\begin{aligned}&|(\partial_y f_i)_n-(\partial_y f_i)_{n'}|<\varepsilon,\\&|(\partial_{u_j}f_i)_n-(\partial_{u_j}f_i)_{n'}|<\varepsilon,\end{aligned}\right\}\quad(n,\ n'>N(\varepsilon)) \tag{22.30}$$

这里 $(\quad)_n$ 表示取其中的 $u=u^{(n)}$。

現在 $u_i=u_i^{(n+1)}-u_i^{(n'+1)}$ 是微分方程

$$\partial_x u_i=\lambda_i(x,\ y)\partial_y u_i+\{(f_i)_n-(f_i)_{n'}\} \tag{22.31}$$

满足初始条件“$x=a$ 时，$u_i=0$”的解。因此由 (22.29)，(22.30) 及(22.27)有

$$\begin{aligned}&|\partial_y\{(f_i)_n-(f_i)_{n'}\}|\\&\leqslant|(\partial_y f_i)_n-(\partial_y f_i)_{n'}|+\sum_{j=1}^{m}|(\partial_{u_j}f_i)_n-(\partial_{u_j}f_i)_{n'}|\cdot|\partial_y u^{(n')}|\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}|(\partial_{u_j}f_i)_n|\cdot|\partial_y(u_j^{(n)}-u_j^{(n')})|\\&<\varepsilon+\varepsilon mMe^{K(x-a)}+mH\gamma_{n,n'}e^{K(x-a)}\\&\leqslant\{\varepsilon(1+mM)+mH\gamma_{n,n'}\}e^{K(x-a)}.\end{aligned} \tag{22.32}$$

于是根据定理(22.1)(其中的 $\varepsilon'=0$)，有

$$\begin{aligned}&|\partial_y(u_i^{(n+1)}-u_i^{(n'+1)})|\\&\leqslant\int_a^x e^{L(x-\xi)}\{\varepsilon(1+mM)+mH\gamma_{n,n'}\}e^{K(\xi-a)}d\xi\\&<(K-L)^{-1}\{\varepsilon(1+mM)+mH\gamma_{n,n'}\}e^{K(x-a)},\end{aligned}$$

但是根据定义 (22.28) (令 $K-L=2+mH$)，对 $\gamma_{n+1,n'+1}$ 成立着下列不等式：

$$\gamma_{n+1,n'+1} \leqslant \varepsilon\frac{1+mM}{2+mH}+\frac{mH}{2+mH}\gamma_{n,n'}. \tag{22.33}$$

令 $\sup\limits_{n,n'\geqslant\nu}(\gamma_{n,n'})=\bar{\gamma}_\nu$，$\lim\limits_{\nu\to\infty}\bar{\gamma}_\nu=\gamma$，則由(22.33)有

$$\bar{\gamma}_{\nu+1} \leqslant \varepsilon\frac{1+mM}{2+mH}+\frac{mH}{2+mH}\bar{\gamma}_\nu,$$

所以当 $\nu\to\infty$ 时，有

$$\gamma\leqslant\frac{1+mM}{2+mH}\varepsilon+\frac{mH}{2+mH}\gamma,$$

即

$$\gamma\leqslant\frac{1+mM}{4+2mH}\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意小的数，所以

$$\lim_{n,n'\to\infty}\gamma_{n,n'}=\gamma=0.$$

这样就証明了 $\partial_y u_i^{(n)}$ 当 $n\to\infty$ 时的一致收斂性。此外由于

$$\partial_x u_i^{(n)}=\lambda_i(x, y)\partial_y u_i^{(n)}+f_i(x, y, u^{(n)}), \tag{22.34}$$

所以可以理解，当 $n\to\infty$ 时，$\partial_x u_i^{(n)}$ 也一致收斂。于是 $u_i^{(n)}$ 的极限 $u_i(x, y)$ 連續可微分，并且由(22.34)取 $n\to\infty$ 的极限，有

$$\partial_x u_i(x, y)=\lambda_i(x, y)\partial_y u_i(x, y)+f_i(x, y, u(x, y)).$$

对于滿足初始条件的解的唯一性，可以如下地得到証明。設 $u_i(x, y)$，$u_i'(x, y)$ 都是"当 $x=a$ 时，$u_i=\varphi_i(y)$"的解。令 $u_i=u_i(x, y)-u_i'(x, y)$，那么 $u_i$ 就是方程

$$\begin{aligned}\partial_x u_i=&\lambda_i(x, y)\partial_y u_i\\&+\{f_i(x, y, u(x, y))-f_i(x, y, u'(x, y))\}\end{aligned} \tag{22.35}$$

滿足条件"$x=a$ 时 $u_i=0$"的解。現在令

$$\operatorname*{Max}_{i}\operatorname*{Max}_{(x,y)\in D}\{|u_i(x, y)-u_i'(x, y)|e^{-K(x-a)}\}=\gamma, \tag{22.36}$$

則

$$|f_i(x, y, u(x, y))-f_i(x, y, u'(x, y))|\leqslant mH\gamma e^{K(x-a)}. \tag{22.37}$$

因此对(22.35)的解 $u_i = u_i(x, y) - u_i'(x, y)$ 适用定理 22.1，从而有

$$|u_i(x, y) - u_i'(x, y)| \leqslant \int_a^x mH\gamma e^{K(\xi-a)} d\xi < K^{-1} mH\gamma e^{K(x-a)},$$

于是由(22.36)有

$$\gamma \leqslant K^{-1} mH\gamma. \tag{22.38}$$

如取 $K = 2mH$，則得 $\gamma = 0$，即

$$u_i(x, y) = u_i'(x, y).$$

**4．决定区域，适切的决定条件**　綜合前节及本节中的結果可得下面的定理。

**定理 22.2**　設 $A_{ij}(x, y)$ 在 $(x^0, y^0)$ 的某一邻域中二次連續可微，$f_i(x, y, u)$ 在 $(x^0, y^0, u^0)$ 的某一邻域中一次連續可微，$\varphi_i(y)$ 在 $y^0$ 的某一邻域中一次連續可微，并設 $\varphi_i(y^0) = u_i^0$。此外，如果(21.10)具有相异实根的話，則方程(21.1)在 $(x^0, y^0)$ 的邻域中具有唯一的满足初始条件 $x = x^0$ 时 $u_i = \varphi_i(y)$ 的解 $u_i = u_i(x, y)$。

現在考查一下由初始条件决定的解的决定区域。首先把矩陣 $(A_{ij})$ 的本征值，依照大小的次序排列如下：

$$\lambda_1(x, y) < \lambda_2(x, y) < \cdots < \lambda_m(x, y).$$

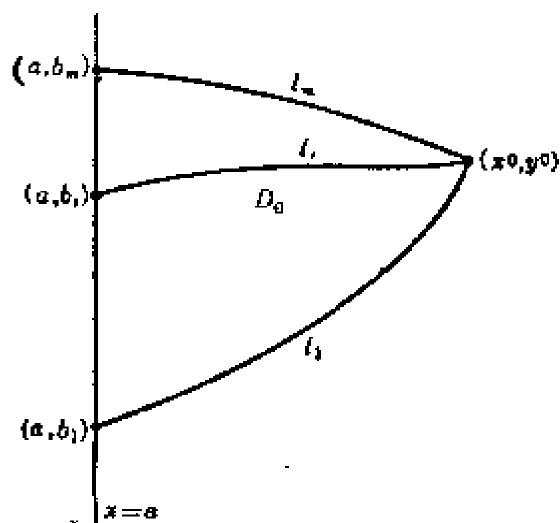


图 22.2

設在直綫 $x = a$ 的右側 $(x > a)$ 任取一点 $(x^0, y^0)$，存在着 $m$ 条通过 $(x^0, y^0)$ 的特征曲綫 $l_1, \cdots, l_m$（$l_i$ 是 $y' = -\lambda_i(x, y)$ 的解曲綫）。設 $l_i$ 与 $x = a$ 的交点为 $(a, b_i)$。那么当 $x$ 在閉区間 $[a, x_0]$ 中变化时，按由下而上的順序来数特征綫，应該是 $l_1, \cdots, l_m$。

設 $l_1$, $l_m$ 与 $x=a$ 圍成的区域为 $D_0$ (图 22.2)。如果注意到(21.1)經过变换(21.3)后变成了标准型,那么就可以了解, $u_i$ 在 $D_0$ 內点的值, 由仅与直綫 $x=a$ 上开区間 $(b_1, b_m)$ 中的 $y$ 有关的始值 $u_i=\varphi_i(y)$ 所唯一决定(参看本节中唯一性的証明,在定理 22.1 中, $y=\alpha(x)$ 是方程 $y'=-\lambda_1(x, y)$ 通过 $(x^0, y^0)$ 点的解曲綫, $y=\beta(x)$ 是方程 $y'=-\lambda_m(x, y)$ 通过 $(x^0, y^0)$ 的解曲綫)。即 $D_0$ 是綫段 $x=a$, $b_1<y<b_m$(在 $x>a$ 的一側)的决定区域。

現在利用定理 22.1 来証明解对于始值的連續性。先考虑把方程变成标准型。再設 $u_i(x, y)$ 及 $u_i'(x, y)$ 是方程(22.1)在 $x=a$ 上相当接近的解,即

$$|u_i(a, y)-u_i'(a, y)|<\varepsilon, \qquad (22.39)$$

那么 $u_i=u_i(x, y)-u_i'(x, y)$ 就滿足(22.35)。如用(22.36)来定义 $\gamma$, 則(22.37)成立。由定理 22.1, 代替(22.38), 就有

$$|u_i(x, y)-u_i'(x, y)|<\varepsilon+\int_a^x mH\gamma e^{K(\xi-a)}d\xi$$
$$\leqslant(\varepsilon+K^{-1}mH\gamma)e^{K(x-a)}.$$

如置 $K=2mH$, 則根据 $\gamma$ 的定义,有

$$\gamma\leqslant\varepsilon+\frac{1}{2}\gamma,$$

即 $\gamma\leqslant 2\varepsilon$. 于是在 $D_0$ 內有

$$|u_i(x, y)-u_i'(x, y)|\leqslant 2\varepsilon e^{2mH(x-a)}.$$

当方程 (21.1) 是橢圓型的时候,結論与双曲型的情形完全不同。我們考虑一个最簡单的情形,即 Cauchy–Riemann 方程

$$\partial_x u=\partial_y v, \quad \partial_x v=-\partial_y u. \qquad (22.40)$$

这时,滿足条件"$x=0$ 时, $u=\varphi(y)$, $v=0$"的解,仅当 $\varphi(y)$ 为解析函数时才能存在(§ 2 注意 2)。而且解不具有对始值的連續性。事实上,譬如取

$$u=n^{-k}(e^{nx}+e^{-nx})\cos ny,$$
$$v=n^{-k}(e^{nx}-e^{-nx})\sin ny$$

为(22.40)的解，并有始值条件"$x=0$ 时，$u=2n^{-k}\cos ny\equiv\varphi_n(y)$，$v=0$"。这个始值函数 $\varphi_n(y)$ 当 $n\to\infty$ 时一致收斂于0。但是对于 $x\neq 0$，則

$$u^2+v^2=2n^{-2k}(e^{2nx}+e^{-2nx}+\cos^2 ny-\sin^2 ny),$$

它当 $n\to\infty$ 时趋于 $\infty$。(在 $x=0$ 上，$\varphi_n(y)$ 以及它直到 $k-1$ 阶的导数都一致收斂于0。此外如取 $n^{-\sqrt{n}}$ 代替 $n^{-k}$，則当 $x=0$ 时，$\varphi_n(y)$ 的各阶导数都一致收斂于0，但对 $x\neq 0$，就有 $u^2+v^2\to\infty$。)

一般地說，对于已知的偏微分方程，如果作为决定解的条件能够使下列三点成立，那么就說这个条件是**适切的**：

(i) 滿足这个条件的解存在(存在性)。

(ii) 滿足这个条件的解仅有一个(唯一性)。

(iii) 解和关于条件中給定的值的(在适当的意义下)連續依賴性(連續性)。

所以对双曲型的情形，初始条件(在决定区域中)是适切的，但是对 Cauchy-Riemann 方程，初始条件就不是适切的了。此外，对 Laplace 方程 $\Delta u=0$，初始条件也不适切，但是边界条件是适切的。(对圓的情形已在 §20 中討論过，对閉曲綫所圍的单連通区域，可以用保角映象(直到圓周連續)变成圓的情形来討論。)

# 第5章 一般二阶綫性偏微分方程

本章将对二个以上独立变数的二阶偏微分方程，主要是对綫性的情形，作某些一般性的叙述。在本章中並不規定一切的变数都是实数，对函数仅假設在适当的范圍內具有相当阶数(一般二阶)的連續导数。此外还将对特征曲面及 Green 公式等作一般性的討論。对于每个类型的較深入的問題将留待下章来研究。

現在先解释一下所用的記号：独立变数 $x$ 一般表示的是 $m$ 个实变数 $(x_1, \cdots, x_m)$，$\partial_i u$ 及 $\partial_{ij}^2 u$ 具有在本书开头所作的解释。此外，如取 $x' = (x'_1, \cdots, x'_m)$ 代替 $x$ 作为独立变数，那么 $\partial'_i u$ 就表示 $\partial u/\partial x'_i$，$\partial'^2_{ij} u$ 表示 $\partial^2 u/\partial x'_i \partial x'_j$。其次，对 $\partial_x \varphi \neq 0 \ (= 0)$ 应理解为 $(\partial_1 \varphi, \cdots, \partial_m \varphi) \neq (0, \cdots, 0) \ (= (0, \cdots, 0))$。

## §23 关于二阶綫性方程独立变数的变换

**1. 独立变数的变换** 設以 $L[u]$ 表示对任意函数 $u(x)$ 的下列微分算子

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \partial_i u + c(x) u, \tag{23.1}$$

这里 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$。如把独立变数由 $x$ 变成 $x'$，由于

$$\left.\begin{aligned} \partial_i u &= \sum_{\mu=1}^{m} \partial'_\mu u \partial_i x'_\mu, \\ \partial_{ij}^2 u &= \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} \partial'^2_{\mu\nu} u \partial_i x'_\mu \partial_j x'_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} \partial'_\mu u \partial_{ij}^2 x'_\mu, \end{aligned}\right\} \tag{23.2}$$

则 $L[u]$ 变成下式

$$L[u] = \sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu} \partial'^2_{\mu\nu} u + \sum_{\mu=1}^{m} b'_\mu \partial'_\mu u + cu. \tag{23.3}$$

为了得到 $a'_{\mu\nu}$ 的表达形式，对于任意函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，引入下面的运算符号

$$Q(\varphi, \psi)=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x)\partial_i\varphi\partial_j\psi.$$

使用了这种符号，并由(23.2)就有

$$a'_{\mu\nu}=Q(x'_\mu, x'_\nu). \tag{23.4}$$

对 $Q(\varphi, \psi)$ 能够証明它对独立变数的变换是不变的。事实上，由(23.4)有

$$\begin{aligned}Q'(\varphi, \psi)&=\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu}\partial'_\mu\varphi\partial'_\nu\psi\\&=\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m}\left(\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\partial_i x'_\mu\partial_j x'_\nu\right)\partial'_\mu\varphi\partial'_\nu\psi\\&=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\left(\sum_{\mu=1}^{m}\partial_i x'_\mu\partial'_\mu\varphi\right)\left(\sum_{\nu=1}^{m}\partial_j x'_\nu\partial'_\nu\psi\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\partial_i\varphi\partial_j\psi=Q(\varphi, \psi).\end{aligned}$$

**2. 分离时間变数**　設对于函数 $\varphi_1(x)$ 成立着

$$Q(\varphi_1, \varphi_1)\neq 0, \tag{23.5}$$

这时可另取 $m-1$ 个函数 $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 使得

$$Q(\varphi_1, \varphi_\nu)=0 \quad (\nu=2, \cdots, m), \tag{23.6}$$

并且

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)}{D(x_1, \cdots, x_m)}\neq 0. \tag{23.7}$$

令

$$x'_\mu=\varphi_\mu(x) \quad (\mu=1, \cdots, m),$$

这样把独立变数由 $x$ 变成 $x'$，由于

$$a'_{11}=Q(\varphi_1, \varphi_1)\neq 0,$$
$$a'_{1\nu}=Q(\varphi_1, \varphi_\nu)=0 \quad (\nu=2, \cdots, m),$$

因此以 $x'$ 为独立变数的微分方程

$$L[u]=f(x), \tag{23.8}$$

将成为不含 $\partial'^2_{1\nu}u\,(\nu\geqslant 2)$ 的形状。现在把 $x'_1$ 写成 $t$，就有

$$\tilde{L}[u]=\partial^2_{tt}u+\tilde{b}\partial_t u+\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m}\tilde{a}_{\mu\nu}\partial'^2_{\mu\nu}u$$

$$+\sum_{\mu=2}^{m}\tilde{b}_\mu\partial'_\mu u+\tilde{c}u=\tilde{f}(t,x'). \tag{23.9}$$

为了得到满足(23.6)及(23.7)的 $\varphi_\nu$，可令

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j\varphi_1=P_i(x), \tag{23.10}$$

由于 $\sum_{i=1}^{m}P_i\partial_i\varphi_1=Q(\varphi_1,\varphi_1)\neq 0$，就有 $(P_1,\cdots,P_m)\neq(0,\cdots,0)$，故 $w$ 的一阶齐次綫性方程

$$Q(\varphi_1,w)=\sum_{i=1}^{m}P_i(x)\partial_i w=0$$

具有 $m-1$ 个独立解 $w=\varphi_2,\cdots,\varphi_m$。这样就能使(23.6)成立，且

$$\mathrm{Rk}\left(\partial_i\varphi_\nu\quad {\nu\to 2,\cdots,m \atop i\to 1,\cdots,m}\right)=m-1. \tag{23.11}$$

现在来証明(23.7)成立。設在某一点 $x=x^0$ 处

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{D(x_1,\cdots,x_m)}\bigg|_{x=x^0}=0,$$

则由(23.11)可知存在着 $c_2,\cdots,c_m$，使得

$$\partial_j\varphi_1(x^0)=\sum_{\nu=2}^{m}c_\nu\partial_j\varphi_\nu(x^0)\quad (j=1,\cdots,m),$$

从而由(23.6)有

$$Q(\varphi_1,\varphi_1)_{x=x^0}=\left\{\sum a_{ij}\partial_i\varphi_1\left(\sum_{\nu=2}^{m}c_\nu\partial_j\varphi_\nu\right)\right\}_{x=x^0}$$

$$=\sum_{\nu=2}^{m}c_\nu Q(\varphi_1,\varphi_\nu)=0.$$

它与(23.5)矛盾。因此(23.7)必需成立。

此外，为了消去(23.8)中含 $\partial_t u$ 的項，可設

$$u=\lambda w,$$

于是

$$\tilde{L}[u]=\lambda\Big(\partial_{tt}^2 v+\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m}\tilde{a}_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}'^2 v\Big)+(2\lambda_t+\tilde{b}\lambda)\partial_t v$$

$$+\sum_{\mu=2}^{m}\Big(\tilde{b}_\mu\lambda+2\sum_{\mu=2}^{m}\tilde{a}_{\mu\nu}\partial_\nu'\lambda\Big)\partial_\mu' v+\tilde{L}[\lambda]v=\tilde{f}(t,x').$$

如置

$$\lambda=\exp\left(-\frac{1}{2}\int\tilde{b}dt\right)\quad(\neq 0),\qquad (23.12)$$

则就得到除去 $\partial_{tt}^2$ 以外，不再含有其他对 $t$ 导数的方程，卽

$$\partial_{tt}^2 v+\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m}A_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}'^2 v+\sum_{\mu=2}^{m}B_\mu\partial_\mu' v+Cv=F,\qquad (23.13)$$

这里 $A_{\mu\nu}$, $B_\mu$, $C$, $F$ 一般是 $(t, x_2', \cdots, x_m')$ 的函数。

**注意** 如果仅考虑主部的形式，则本节中的結果对半綫性方程也成立。

## §24 特 征 面

对于 $\varphi(x)=0$ $(\partial_x\varphi\neq 0)$ 所表示的曲面（$m-1$ 維流形），如果在某一点 $x=x^0$ 处满足

$$Q(\varphi,\varphi)_{x=x^0}=0$$

的話，那么就說曲面 $\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处有特征点。如果曲面 $\varphi(x)=0$ 上的每一点都是特征点，则称曲面 $\varphi(x)=0$ 为特征面。这个定义和 §3 中所給的定义完全一致。如果曲面 $\varphi_1(x)=0$ 上某一点 $x=x^0$ 不是特征，那么在 $x^0$ 的邻域可选择 $m-1$ 个满足条件 $D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)/D(x_1,\cdots,x_m)\neq 0$ 的函数 $\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$，当用 $x_\mu'=\varphi_\mu(x)$ $(\mu=1,\cdots,m)$ 把独立变数由 $x$ 变成 $x'$ 时，由于 $a_{11}'=Q(\varphi_1,\varphi_1)\neq 0$，所以就把方程(23.8)变成了基准型（卽已解出 $\partial_{11}'^2 u$ 的形状）方程

$$\partial_{11}'^2 u=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{m}a_{ij}'\partial_{ij}'^2 u+\sum_{i=1}^{m}b_i'\partial_i' u+c'u+f'(x').$$

（根据前节的討論，它还可以变成(23.9)甚至(23.13)的形状。）但

如 $\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处有特征，那么就不能变成这种形状。

設 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 是 $m$ 个任意的实数，考虑二次型

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j. \tag{24.1}$$

如果(24.1)在 $x=x^0$ 处是定号的(即对 $\xi\neq0$ 恒正或恒負)，那么只要 $\partial_x\varphi\neq0$，就有 $Q(\varphi, \varphi)\neq0$，也就是說曲面 $\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处沒有特征。这时我們說，$L[u]$ 在 $x=x^0$ 处为**椭圓型**。相反的，如果在 $x=x^0$ 处(24.1)是变号的(对 $\xi$ 可正可負)，并且为非蜕化的，即

$$|a_{ij}|_{j=1,\cdots,m}^{i=1,\cdots,m}\neq0, \tag{24.2}$$

那末我們說 $L[u]$ 在 $x=x^0$ 处为**广义双曲型**。这时，含有点 $x=x^0$ 的特征面是实曲面。

事实上，这时存在着 $\xi^0$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x^0)\xi_i^0\xi_j^0=0, \quad \xi^0\neq0. \tag{24.3}$$

因此，如令

$$F(x, p)\equiv\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x)p_ip_j, \tag{24.4}$$

則一阶偏微分方程

$$Q(u, u)=F(x, p)=0 \quad (p=\partial_x u) \tag{24.5}$$

具有含面素 $(x, u, p)=(x^0, 0, \xi^0)$ 的解 $u=\varphi(x)$。(見注意1)由于 $Q(\varphi, \varphi)=0$，$\varphi(x^0)=0$，$\partial_x\varphi(x^0)=\xi^0\neq0$，所以 $\varphi(x)=0$ 是包含点$x^0$ 的特征面。

此外，如果 $|a_{ij}(x^0)|_{j=1,\cdots,m}^{i=1,\cdots,m}|=0$，那么就說 $L[u]$在 $x=x^0$ 处为**广义抛物型**。

特征面的条件是 $\varphi(x)=0$ 及 $Q(\varphi, \varphi)=0$。如果存在着 $\varphi(x)$，使得 $Q(\varphi,\varphi)=0$(仅設 $\partial_x\varphi\neq0$)恒等地成立，那么 $\varphi(x)=c$($c$ 任意

常数）所表示的曲面族都是特征面。现在我們来証明，如 $\varphi_0(x)=0(\partial_x\varphi_0\neq 0)$ 是特征面，那么存在着包含它的特征曲面族 $\varphi(x)=c$。設(24.2)成立。在满足 $\varphi_0(x^0)=0$ 的点 $x^0$ 的邻域中，不失一般性可設 $\partial_1\varphi_0\neq 0$. 这样，曲面 $\varphi_0(x)=0$ 在这点的邻域就能写成下面的样子：

$$x_1=\psi_0(x_2,\cdots,x_m). \tag{24.6}$$

现在簡单地記 $(x_2,\cdots,x_m)=\dot{x}$，并設

$$\Phi(\dot{x},u,p)=a_{11}(u,\dot{x})-2\sum_{\nu=2}^{m}a_{1\nu}(u,\dot{x})p_\nu + \sum_{\mu,\nu=2}^{m,m}a_{\mu\nu}(u,\dot{x})p_\mu p_\nu, \tag{24.7}$$

由于 $\partial_\nu\psi_0=-(\partial_\nu\varphi_0/\partial_1\varphi_0)_{x_1=\psi_0}$，所以

$$\Phi(\dot{x},\psi_0,\partial_{\dot{x}}\psi_0)=\{Q(\varphi_0,\varphi_0)(\partial_1\varphi_0)^{-2}\}_{x_1=\psi_0}=0,$$

即 $u=\psi_0$ 是一阶偏微分方程

$$\Phi(\dot{x},u,p)=0\quad(p=\partial_{\dot{x}}u) \tag{24.8}$$

的解。如假定 $\Phi_{p_2}\neq 0$（見注意2），那么(24.8)就在 $x=x^0$ 的邻域具有满足条件

$$x_2=x_2^0\text{ 时},\quad u=\psi_0(x_2^0,x_3,\cdots,x_m)+c$$

的解（$c$ 相当小）。令这解为 $u=\psi(x_2,\cdots,x_m,c)$，由于 $\psi_c\neq 0$，所以可在

$$x_1=\psi(x_2,\cdots,x_m,c) \tag{24.9}$$

中解出 $c$，而得到

$$c=\varphi(x_1,\cdots,x_m). \tag{24.10}$$

但是由于 $\varphi(x)_{x_1=\psi}=c$（恒等式），所以

$$\partial_\nu\psi=-(\partial_\nu\varphi/\partial_1\varphi)_{x_1=\psi}\qquad(\nu=2,\cdots,m).$$

于是有

$$Q(\varphi,\varphi)_{x_1=\psi}=(\partial_1\varphi)^2\Phi(\dot{x},\psi,\partial_{\dot{x}}\psi)=0. \tag{24.11}$$

再由(24.9)与(24.10)等关系，所以 $(\psi)_{c=\varphi}=x_1$ 恒等地成立，因此

在(24.11)中令 $c=\varphi$ 后，就恒等地成立

$$Q(\varphi, \varphi)=0. \tag{24.12}$$

此外，由于 $\psi(\dot{x}, 0)=\psi_0(\dot{x})$，所以 $\varphi(x)=0$ 与 $x_1=\psi_0(\dot{x})$ 是等价的，从而它与 $\varphi_0(x)=0$ 表示着同一曲面。

**注意 1** 对(24.4)所定义的 $F$，有

$$F_{p_i}=2\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x)p_j.$$

因此，如果 $F_{p_i}(x^0, \xi^0)=0 \quad (i=1, \cdots, m)$，则有

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x^0)\xi_j^0=0 \quad (i=1, \cdots, m),$$

由于 $\xi^0\neq 0$，所以非成立如下的条件不可

$$|a_{ij}(x^0) \quad {}_{j=1,\cdots,m}^{i=1,\cdots,m}|=0.$$

因此，假定所討論的是(24.2)的情形，那么 $F_{p_i}(x^0, \xi^0)$ 就不能都等于0。为了便利起见可設 $F_{p_1}(x^0, \xi^0)\neq 0$，这样关于 $x_1=x_1^0$ 的初始面素組将含有面素 $(x, u, p)=(x^0, 0, \xi^0)$。如再設它满足方程 $F(x, u, p)=0$，那就得到了方程(24.4)含有面素 $(x^0, 0, \xi^0)$ 的解 $u=\varphi(x)$（見§12）。

**注意 2** 由(24.7)有

$$\Phi_{p_i}=2\Big(\sum_{j=2}^{m}a_{ij}p_j-a_{1j}\Big). \tag{24.13}$$

又因为

$$\Phi=\sum_{i=2}^{m}\Big(\sum_{j=2}^{m}a_{ij}p_j-a_{1j}\Big)p_i+a_{11}-\sum_{j=2}^{m}a_{1j}p_j, \tag{24.14}$$

所以在 $x=x^0$ 处，如有

$$(\Phi_{p_i})_{\psi_0, x=x^0}=0 \quad (i=2, \cdots, m)$$

[$(\ )_{\psi_0}$ 表示在括号内取 $(u, p)=(\psi_0, \partial_x\psi_0)$]，那么由 $(\Phi)_{\psi_0}=0$ 及(24.13)，(24.14)，就有

$$\Big(a_{11}-\sum_{j=2}^{m}a_{1j}p_j\Big)_{\psi_0, x=x^0}=0,$$

因此，只要令 $p_1=-1$，就得到

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}p_j\Big)_{\psi_0, x=x^0}=0 \quad (i=1, \cdots, m).$$

从而有

$$|a_{ij}(x^0) \quad {}_{j=1,\cdots,m}^{i=1,\cdots,m}|=0.$$

这个結果显然与(24.2)矛盾。所以原来所作的假設 $\Phi_{p_i}=0 \ (i=2, \cdots, m)$ 是

不合理的。

## §25　横截向量，特征射綫

**1. 横截向量，余法綫，导数**　对于曲面 $\varphi(x)=0$ $(\partial_x\varphi\neq 0)$ 上的任一点 $x=x^0$，用公式

$$\xi_i=\lambda\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x^0)\partial_j\varphi(x^0)\quad(\lambda\neq 0)\,(i=1,\cdots,m)\tag{25.1}$$

所定义的向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 叫做曲面在 $x^0$ 处的**横截向量**(transversal vector)。特别是当 $a_{ij}(x^0)=a\delta_{ij}$ $(a\neq 0)$ 时，$\varphi(x)=0$ 在 $x^0$ 处的横截向量就和曲面在这点的法綫一致。

令 $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_m)$ 代表曲面 $\varphi(x)=0$ 在点 $x^0$ 处，并指向正侧 $(\varphi(x)>0)$ 的单位法綫，则

$$n_i=\partial_i\varphi(x^0)/|\partial_x\varphi(x^0)|\quad\left(|\partial_x\varphi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\partial_i\varphi^2}\right).\tag{25.2}$$

現在用

$$N_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x^0)n_j=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x^0)\partial_j\varphi(x^0)/|\partial_x\varphi(x^0)|\tag{25.3}$$

定义的向量 $N=(N_1,\cdots,N_m)$ 显然是 $\varphi(x)=0$ 在 $x^0$ 处的一个横截向量。我們特别称它为 $\varphi(x)=0$ 在 $x^0$ 处的**余法綫**(conormal)。

对于向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 和任意函数 $u(x)$，下列的极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x^0+h\xi)-u(x^0)}{h}=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\partial_iu(x^0)$$

叫做 $u(x)$ 在 $x=x^0$ 处关于 $\xi$ 的**方向导数**，并把它写成

$$\partial_\xi u(x^0)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\partial_iu(x^0).\tag{25.4}$$

当 $N$ 是曲面 $\varphi(x)=0$ 在 $x^0$ 处的余法綫时，由(25.3)有

$$\begin{aligned}\partial_N u(x^0)&=\sum_{i=1}^{m}N_i\partial_iu(x^0)\\&=\{Q(\varphi,u)/|\partial_x\varphi|\}_{x=x^0}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x^0)\partial_i u(x^0) u_j, \tag{25.5}$$

它叫做 $u(x)$ 在 $x^0$ 处（对于曲面 $\varphi(x)=0$）的**余法綫导数**。

**习題** 当二次型(24.1)为正定，即 $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \ (\xi \neq 0)$ 时，証明法綫与余法綫之間的夾角必小于直角。

**2. 特征射綫** 設 $\xi$ 是曲面 $\varphi(x)=0$ 在 $x^0$ 处的横截向量，由(25.1)有

$$\partial_\xi \varphi(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \partial_i \varphi(x^0) = \lambda Q(\varphi, \varphi)_{x=x^0}.$$

因此知道，$\varphi(x)=0$ 在 $x=x^0$ 处为特征的事实，等价于在 $x^0$ 处的横截向量在此点与曲面 $\varphi(x)=0$ 相切。另外，如果条件(24.2)成立，并且 $\varphi(x)=0$ 为特征面，那么存在着通过曲面上各点，并落在 $\varphi(x)=0$ 上的横截曲綫。事实上，根据前节的討論，只要討論恒等地成立 $Q(\varphi, \varphi)=0$ 即可。这时，設方程

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x)\partial_j \varphi(x) \quad (i=1, \cdots, m) \tag{25.6}$$

滿足条件"$t=0$ 时，$x=x^0$（$\varphi(x)=0$ 上的点）"的解为 $x=x(t)$，那么就有

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t)) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i \varphi \cdot \frac{dx_i}{dt} = Q(\varphi, \varphi)_{x=x(t)} = 0.$$

于是 $\varphi(x(t)) = \varphi(x^0) = 0$，这就是說 $x=x(t)$ 落在 $\varphi(x)=0$ 上，亦即特征面包含着自已的横截曲綫。因此我們称(25.6)的解曲綫 $x=x(t)$ 为**特征射綫**(characteristic ray)。又因为特征射綫是定义在特征面上的一阶偏微分方程

$$Q(u, u) = F(x, p) \quad (p = \partial_x u) \tag{25.7}$$

的基础特征曲綫，所以在这种意义下也叫特征射綫为**双特征曲綫**(bicharacteristic curve)。

事实上，如設

$$\varphi(x(t))=u(t),\quad \partial_i\varphi(x(t))=p_i(t),$$

首先由(25.2)与(24.4)($p_i=\partial_i\varphi$)就有

$$\frac{dx_i}{dt}=\left\{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,\partial_j\varphi\right\}_{x=x(t)}=\frac{1}{2}\{F_{p_i}\}_{(x,p)=(x,p)(t)},\tag{25.8}$$

于是有

$$\frac{du}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\left\{\partial_i\varphi\,\frac{dx_i}{dt}\right\}_{x=x(t)}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m}p_iF_{p_i}\right\}_{(x,p)=(x,p)(t)},\tag{25.9}$$

此外由于

$$\frac{dp_i}{dt}=\sum_{j=1}^{m}\partial_{ij}^2\varphi(x(t))\frac{dx_j}{dt}=\sum_{j,k=1}^{m,m}(\partial_{ij}^2\varphi\cdot a_{jk}\partial_k\varphi)_{x=x(t)},$$

以及

$$\partial_i\{Q(\varphi,\varphi)\}=\sum_{j,k=1}^{m,m}(\partial_ia_{jk}\cdot\partial_j\varphi\partial_k\varphi+2a_{jk}\partial_{ij}^2\varphi\cdot\partial_k\varphi)=0,$$

所以得到

$$\sum_{j,k}^{m,m}\partial_{ij}^2\varphi\cdot a_{jk}\partial_k\varphi=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m,m}\partial_ia_{jk}\partial_j\varphi\partial_k\varphi=-\frac{1}{2}\{F_{x_i}\}_{p=\partial_x\varphi},$$

由此就有

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{1}{2}\{F_{x_i}\}_{(x,p)=(x,p)(t)}.\tag{25.10}$$

因为 $F$ 中不含有 $u$，所以由(25.4)、(25.5)，(25.6)就可以証明 $(x,u,p)=\{x,u,p\}(t)$ 是(25.3)的特征带，于是 $x=x(t)$ 是方程(25.7)的基础特征曲綫。

特别当 $m=2$ 时，一維的特征面是特征曲綫，它与特征射綫(双特征曲綫)完全一致。

当 $a_{ij}$ 是常数时，$F(x,p)$ 仅含有 $p$，而特征射綫＝双特征曲綫则成为直綫(見 §11 的例 1)。

## §26　Green 积分公式

**1. 面积分与散度定理**　这些事实在三維空間($m=3$)中已属

常識的范圍，因为我們要在一般的 $m$ 維空間用到它，所以略加以說明。讀者如果感到对 $m$ 維空間的理解有困难的地方，希望結合 $m=2$，$m=3$ 的特殊情形来进行思考。

設在 $m$ 維空間有一平滑的曲面 $\Gamma$（$m-1$ 維流形），即对 $\Gamma$ 任意点的邻域部分，它的方程可表示成为 $m-1$ 个参数 $s=(s_1,\cdots,s_{m-1})$ 的連續可微的函数

$$\left.\begin{aligned} &x_i = X_i(s_1, \cdots, s_{m-1}) \qquad (i=1, \cdots, m), \\ &\text{并且还滿足条件} \\ &\mathrm{Rk}\,(\partial_\mu X_i(s) \quad {}_{\mu=1,\cdots,m-1}^{i=1,\cdots,m}) = m-1. \end{aligned}\right\} \tag{26.1}$$

或可用 $x$ 的連續可微函数 $\varphi(x)$ 表示为

$$\varphi(x)=0 \quad \text{而 } \partial_x\varphi \neq 0.$$

对于 $\Gamma$ 的表面积，如用(26.1)的表示法，并置

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_i = \left|\partial_\mu X_j \quad {}_{\mu=1,\cdots,m-1}^{j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m}\right|, \\ &\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}, \end{aligned}\right\} \tag{26.2}$$

那末它可以写成 $m-1$ 重的积分

$$S(\Gamma) = \int_\Gamma \sigma(s)\, d^{m-1}s.$$

这样定义的 $S(\Gamma)$ 的值，对于参数变换是不变的，并且对于空間坐标 $x$ 的合同变换（平行移动或綫性正交变换）也是不变的。特别当 $\Gamma$ 是平面（即 $m-1$ 維綫性流形）的一部分时，$S(\Gamma)$ 与 $\Gamma$ 的 $m-1$ 維体积（在 $m$ 維空間内考虑为面积）完全一致。此外当 $m=3$ 时，$S(\Gamma)$ 表示通常曲面的面积，而当 $m=2$ 时，則表示曲綫 $\Gamma$ 的长度。

现在对于定义在 $\Gamma$ 上的函数 $\varphi(x)=\varphi(X(s))$，称如下的 $m-1$ 重积分

$$\int_\Gamma \varphi(X(s))\,\sigma(s)\,d^{m-1}s$$

为 $\Gamma$ 上的**面积分**。令 $\sigma d^{m-1}s=dS_x$，則它可以写成

$$\int_\Gamma \varphi(x)dS_x \quad \left(=\int \varphi(X(s))\sigma(s)d^{m-1}s\right) \tag{26.3}$$

(可以把 $dS_x$ 簡写成 $dS$)，这个积分对于参数变换以及空間坐标的合同变换也是不变的。

此外，如已知曲面 $\Gamma$ 的方程为 $\varphi(x)=0(\partial_x\varphi\neq 0)$，并設 $\Gamma$ 的单位法綫向量为 $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_m)$，則

$$n_i=\varepsilon\partial_i\varphi\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^m(\partial_i\varphi)^2} \quad (i=1,\cdots,m), \tag{26.4}$$

这里 $\varepsilon=\pm1$，$\varepsilon$ 可以根据法綫指向 $\Gamma$ 的某一側，而选定为 $+1$ 或 $-1$。如 $\Gamma$ 已給出为(26.1)的形状，那么使用(26.2)的記号，就有

$$n_i=\varepsilon'\sigma_i/\sigma \quad (\varepsilon'=\pm1). \tag{26.5}$$

若有界区域 $D$ 具有光滑的边界 $\Gamma$，設 $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_m)$ 是 $\Gamma$ 的单位法綫，并指向 $D$ 的外側，則对于在 $D\cup\Gamma$ 上連續可微的函数 $w(x)$ 成立下面的积分关系式：

$$\int_D \partial_i w d^m x=\int_\Gamma w(x)n_i dS.$$

这个公式对具有 $m$ 个分量的向量函数 $W=\{w_1,\cdots,w_m\}(x)$ 也适用，这时应該成立

$$\int_D\left(\sum_{i=1}^m\partial_i w_i\right)d^m x=\int_\Gamma\left(\sum_{i=1}^m w_i n_i\right)dS. \tag{26.6}$$

这个公式叫做**散度定理**(参看本丛书，几何学 § 23)。

**注意 1** 用向量分析中通常的写法，所謂散度定理，即指

$$\int_D \operatorname{div} W d^m x=\int_\Gamma W\cdot\boldsymbol{n}dS,$$

即散度($\operatorname{div}W$)的体积分＝沿表面的通量(flux)面积分。

**2. Green 积分公式** 对于任意函数 $u(x)$，容易把

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u+\sum_{i=1}b_i(x)\partial_i u+c(x)u \tag{26.7}$$

写成

$$L[u]=\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u\right)+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\partial_i u+cu,$$

这里

$$\beta_i=b_i-\sum_{j=1}^{m}\partial_j a_{ij}. \tag{26.8}$$

在上面的形式中，如果把 $\beta_i\partial_i u$ 换成 $-\partial_i(\beta_i u)$，就得到了下面的式子：

$$L^*[u]=\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u\right)-\sum_{i=1}^{m}\partial_i(\beta_i u)+cu, \tag{26.9}$$

这个式子叫做 $L[u]$ 的伴随(微分)式。能够証明 $L^*$ 的伴随式 $L^{**}$ 与 $L$ 一致，特别当 $L^*\equiv L$，即 $\beta_i=0$ $(i=1,\cdots,m)$ 时，$L$ 叫做自伴的。

对于任意函数 $u(x)$ 与 $v(x)$，由(26.8) 及 (26.9)，能够証明下式成立

$$vL[u]-uL^*[v]=\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left\{v\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u-u\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j v+\beta_i uv\right\}.$$

令

$$w_i=v\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u-u\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j v+\beta_i uv,$$

并利用散度定理(26.6)，就得到

$$\int_D\{vL[u]-uL^*[v]\}d^m x=\int_\Gamma\{v\partial_N u-u\partial_N v+\beta_n uv\}dS, \tag{26.10}$$

这里

$$\partial_N\equiv\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}n_i\partial_j\ (\text{余法綫导数}),\quad \beta_n=\sum_{i=1}^{m}\beta_i n_i.$$

上面的公式叫做 **Green 积分公式**。

如 $L$ 是自伴的，则

$$\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left(v\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u\right)=\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_i v\partial_j u+v\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u\right)$$
$$=Q(u,v)-cuv+vL[u],$$

所以令 $w_i=v\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u$，并利用(26.6)，就成立下面的公式：

$$\int_D\{Q(u,v)-cuv\}d^n x+\int_D vL[u]d^n x=\int_\Gamma v\partial_\chi u dS. \quad (26.11)$$

**注意 2**　用(26.7)来规定 $L[u]$ 时，只要假設 $a_{ij}$ 二次，$b_i$ 一次連續可微，$c$ 連續就够了。如用(26.8)的形状来規定 $L[u]$，那么只需 $a_{ij}$ 及 $\beta_i$ 都一次連續可微即可。

**习題**　对(26.7)，証明

$$L^*[u]=\sum_{i,j=1}^{m,m}\partial_{ij}^2(a_{ij}u)-\sum_{i=1}^{m}\partial_i(b_i u)+cu.$$

## §27　广　义　解

設函数 $w(x)$ 在有界区域中直到相当高阶（例如二阶）連續可微，并在离 $D$ 的境界 $\Gamma$ 相当近处恒等于0，則称这种函数为 $D$ 的**試驗函数**(test function)。設 $f(x)$ 是在 $D$ 上的連續函数，如果对于 $D$ 的任意試驗函数 $w$，恒有

$$\int_D f(x)w(x)d^n x=0, \quad (27.1)$$

那末必在 $D$ 内 $f(x)=0$（这个定理是变分学基本引理的推广）。

事实上，如設在 $D$ 内存在着一点 $x^0$，有 $f(x^0)\neq 0$，于是 $f(x)$ 将在 $|x-x^0|<\rho$ （$|x-x^0|=\sqrt{\sum(x_i-x_i^0)^2}$）内保持一定的符号。不失一般性可設在 $|x-x^0|<\rho$ 内 $f(x)>0$。現在取試驗函数 $w(x)$，使得 $w$ 在 $|x-x^0|<\rho$ 内有 $w>0$，并当 $|x-x^0|\geqslant\rho$ 时，$w=0$。譬如当 $|x-x^0|<\rho$ 时，令 $w=\{\rho^2-|x-x^0|^2\}^k(k\geqslant 3)$，而当 $|x-x^0|\geqslant\rho$ 时，令 $w=0$ 即可。于是将有

$$\int_D f(x)w(x)d^n x>0,$$

这个不等式与(27.1)矛盾。所以在 $D$ 内 $f(x)=0$。

設 $u(x)$ 在 $D$ 内为微分方程

$$L[u]=f(x) \tag{27.2}$$

的解，并設 $w$ 是关于 $D$ 的試驗函数，把 Green 公式(26.10)应用于 $u$ 与 $w$，由于 $w$ 与 $\partial_N w$ 在 $\Gamma$ 的邻域恒等于 0，所以对任意的 $u$ 有

$$\int_D \{wL[u]-uL^*[w]\}d^m x=0. \tag{27.3}$$

因此由(27.2)，就成立下列公式

$$\int_D uL^*[w]d^m x=\int_D wfd^m x. \tag{27.4}$$

相反，設函数 $u(x)$ 二次連續可微，并且对于 $D$ 的任意試驗函数 $w$，公式(27.4)成立，那么 $u$ 必为方程(27.2)的解。这是因为根据(27.4)及(27.3)，对于任意的試驗函数 $w$ 成立着等式

$$\int_D w\{L[u]-f\}d^m x=0.$$

所以根据变分学基本引理，$u$ 滿足方程(27.2)。

一般的来說，如果对于 $D$ 的任意試驗函数 $w$，(27.4)恒成立，那么就叫 $u=u(x)$ 为(27.2)的广义解。对广义解，不必限制它是二次可微，甚至是全可微的函数。設一个具有相当高阶(如二阶)連續导数的函数序列 $\{u_n(x)\}$，当 $n\to\infty$ 时，一致(在适当意义下)收斂于函数 $u_\infty(x)$，同时 $L[u_n]$ 一致(也在适当意义下)收斂于 $f(x)$。这时，由于对 $D$ 的任意試驗函数 $w$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_D \{wL[u_n]-u_n L^*[w]\}d^m x=\int_D \{wf-u_\infty L^*[w]\}d^m x,$$

所以由(27.3)可知必定成立

$$\int_D u_\infty L^*[w]d^m x=\int_D wfd^m x.$$

这就是說，$u_\infty$ 是方程(27.2)的广义解。

譬如，我們考虑波动方程

$$L[u]=u_{xx}-u_{yy}=0, \tag{27.5}$$

如 $\varphi,\psi$ 为二次連續可微函数，則

$$u=\varphi(x+y)+\psi(x-y) \tag{27.6}$$

确实是(27.5)的解。如 $\varphi$，$\psi$ 仅是連續函数(不一定存在导数)，那么(27.6)就是(27.5)的广义解。事实上，这时存在着分别一致收斂于 $\varphi$，$\psi$ 的函数序列 $\varphi_n$ 及 $\psi_n$，而 $\varphi_n$ 及 $\psi_n$ 都是二次連續可微的。因此，由于 $u_n=\varphi_n(x+y)+\psi_n(x-y)$ 滿足 $L[u_n]=0$，并且 $u_n$ 一致收斂于 $u=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$，所以 $u$ 是广义解。另外如果我們适当地規定收斂的意义，則(27.5)可能有完全不連續的解。

因此对于波动方程来說，存在着和它原来解意义完全不同的广义解。但是对 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 則不然，这时所謂广义解必定就是原来的解(卽解析正則的解)。

近年来，在一般綫性偏微分方程的理論中，广义解起着非常重要的作用。

**注意**　对于 $D$ 内任意的試驗函数 $w$，以方程(27.4)所定义的广义解特别称为**弱解**。这种解的导函数具有广义函数(卽 Schwartz 所定义的 distribution)的意义。和它相对应的，原来意义下解的极限函数，卽

$$u_n\to u,\quad 而\ L[u_n]\to f\ \ (\to 表示距离空間的强收斂)$$

所規定的广义解，叫做**强解**。这是把微分算子 $L$ 扩張成"閉算子"而产生的解。强解必是弱解，但是相反是否成立，这是一个非常困难的問題。此外，原来意义的解也叫做方程的**純正解**(genuine solution)。

## §28　二阶常系数方程的标准型

現在研究如何把系数 $a_{ij}$，$b_i$，$c$ 是常数的綫性方程

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_{ij}^2u+\sum_{i=1}^{m}b_i\partial_iu+cu=f(x) \tag{28.1}$$

經过变换变成标准型的問題。用綫性变换

$$x'_\mu=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{\mu i}x_i \tag{28.2}$$

把独立变数 $x$ 变成 $x'$，这时，方程(28.1)变成

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu}\partial^2_{\mu\nu}u+\sum_{\mu=1}^{m} b'_\mu\partial_\mu u+cu=f(x'),\\ &\text{这里}\\ &a'_{\mu\nu}=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\alpha_{\mu i}\alpha_{\nu j},\qquad b'_\mu=\sum_{i=1}^{m} b_i\alpha_{\mu i}.\end{aligned}\right\}\tag{28.3}$$

因为 $a_{ij}=a_{ji}$，所以可取(28.2)为适当的正交变换，使得矩陣$(a'_{\mu\nu})$成为对角綫的形式，即

$$a'_{\mu\nu}=\lambda_\mu\delta_{\mu\nu},$$

这里 $\lambda_\mu$ 是矩陣 $(a_{ij})$ 的本征值。令 $|\lambda_i|^{\frac{1}{2}}=\varkappa_i$，由于 $\lambda_i=\varepsilon_i\varkappa_i^2$，$\varepsilon_i=\pm1$，因而可再設 $x'_i=\varkappa_i x''_i$ 而使 $\partial''^2_{\mu\nu}u$ 的系数成为

$$a''_{\mu\nu}=\varepsilon_\mu\delta_{\mu\nu}\quad(\varepsilon_\mu=\pm1\text{ 或 }0).$$

因此可以代替(28.1)，考虑具有下列形状的方程

$$\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\partial_i^2u+\sum_{i=1}^{m}b_i\partial_i u+cu=f(x)\quad(\varepsilon_i=\pm1\text{ 或}0),\tag{28.4}$$

这里 $\varepsilon_i$ 与$(a_{ij})$的本征值 $\lambda_i$ 具有相同的符号。

对一般的矩陣 $(a_{ij})$，即当

$$|a_{ij}|_{j\to1,\cdots,m}^{i\to1,\cdots,m}=\lambda_1\cdots\lambda_m\neq0\tag{28.5}$$

时，$\varepsilon_i=\pm1$ $(i=1,\cdots,m)$。这时，如設

$$u=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i b_i x_i\right)v,\tag{28.6}$$

则容易証明，$v$ 的标准型方程成为下面的形状（不含一阶导数）

$$\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\partial_i^2v+c_1v=f_1(x).\tag{28.7}$$

其次，如果假設$(a_{ij})$为蜕化矩陣，即当方程为一般抛物型而

$$|a_{ij}|_{j\to1,\cdots,m}^{i\to1,\cdots,m}=\lambda_1\cdots\lambda_m=0\tag{28.8}$$

时，则必存在着等于0的 $\varepsilon_i$。

設

$$\varepsilon_i\neq0\quad(i=1,\cdots,k),\qquad\text{而 }\varepsilon_j=0\quad(j=k+1,\cdots,m),$$

则由(28.2)能够得到变换后的方程

$$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\partial_i^2 v+\sum_{j=k+1}^{m}b_j\partial_j v+c_1 v=f_1(x).$$

如果 $b_j$ 中有不等于0的函数，設为 $b_{k+1}$，那么只要令

$$x'_{k+1}=-\sum_{j=k+1}^{m}b_j x_j,$$

就能得到标准型方程

$$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\partial_i^2 v-\partial'_{k+1}v+c_1 v=f_1(x'). \tag{28.9}$$

設 $b_j$ 中沒有不等于0的函数(即一切 $b_j\equiv 0$)，则标准型方程成为

$$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\partial_i^2 v+c_1 v=f_1(x). \tag{28.10}$$

此外，如果 $L[u]$ 属于椭圆型，即 $\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}\xi_i\xi_j$ 为定号的，这时，由于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 同号，所以可以取 $\varepsilon_i=1$ $(i=1, \cdots, m)$，而标准型方程成为

$$\Delta u+cu=f(x), \tag{28.11}$$

$$\left(\Delta u=\sum_{i=1}^{m}\partial_i^2 u\right).$$

其次，如 $L[u]$ 属于广义双曲型，即对于 $(a_{ij})$，$\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 一般为变号的，则本征值能为正数或負数，但不能为0。这时，令 $\varepsilon_i=1$ $(i=1, \cdots, k)$，$\varepsilon_j=-1$ $(j=k+1, \cdots, m)$，则标准型方程成为

$$\sum_{i=1}^{k}\partial_i^2 u-\sum_{j=k+1}^{m}\partial_j^2 u+cu=f(x). \tag{28.12}$$

特别是，当本征值中仅有一个与其余的有相反的符号时，那么，把它所对应的独立变数取作 $t$，而令其余的独立变数为 $x$，则得标准型方程

$$\partial_t^2 u-\Delta_x u+cu=f(t, x). \tag{28.13}$$

这种形式叫做**正規双曲型**(normaly hyperbolic)。非正規的双曲型(即本征值具有二个以上为正或为負的数)叫做**超双曲型**(ultra-

hyperbolic)。

此外，在一般抛物型中，特别当 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是常号（即恒 $\geqslant 0$ 或恒 $\leqslant 0$）的时候，那末除去等于 0 的本征值以外其余的可算作是同号的。因此标准型方程成为

$$\Delta_{(k)}u-\partial_{k+1}u+cu=f(x) \qquad (28.14)$$

或

$$\Delta_{(k)}u+cu=f(x) \quad \left(\Delta_{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\partial_i^2\right).$$

(28.14)的情形叫做**正規抛物型**。

## § 29 作为常系数綫性方程解的平面波

**1. 迭加原理** 現在簡单地述說一下众所熟知的綫性方程，特别是常系数綫性方程的解法。

設 $L[u]$ 是对任意函数 $u$ 的綫性微分算子。$c_\nu$, $u_\nu$ 分别是任意常数与任意函数，则

$$L\left[\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu u_\nu\right]=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu L[u_\nu].$$

因此，如果 $u=u_\nu$ $(\nu=1, \cdots, n)$ 是齐次綫性方程

$$L[u]=0 \qquad (29.1)$$

的解，那么它們的綫性組合 $u=\sum c_\nu u_\nu$（系数为常数）也是(29.1)的解。此外如有无限个解 $u=u_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，并且級数

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n \quad (c_n\ 常数) \qquad (29.2)$$

一致收斂，还适当高次（$L$ 的阶数）逐項可微，那么就有

$$L[u]=\sum_{n=1}^{\infty}c_n L[u_n]=0,$$

因而(29.2)也是(29.1)的解。

再者，如 (29.1) 的解 $u=u(x, \alpha)$ 含有参数 $\alpha$，而且連續依賴

于 $\alpha$ 的变化，对于下列的定积分

$$u=\int\varphi(\alpha)u(x,\alpha)d\alpha \tag{29.3}$$

（积分区与 $x$ 无关），允許在积分符号下进行适当高次的 $u$ 对 $x$ 的微分，则有

$$L[u]=\int\varphi(\alpha)L[u_\alpha]d\alpha=0\quad(u_\alpha=u(x,\alpha)),$$

从而 (29.3) 也是 (29.1) 的解。此外，解对参数所作的导数，即 $u=\partial_\alpha u(x,\alpha)$ 一般也是(29.1)的解。

因此从已知的解，依照上面的步驟就能得到新的解，这种方法叫做**迭加原理**。常常使用这种方法来求具体的偏微分方程满足各式各样条件的解，所收到的效果是良好的（参看本丛书：偏微分方程的应用）。但是严密的說，究竟在什么样的条件下，才允許对級数作逐項微分，或是在积分号下进行微分呢？这样的問題是存在的。但在实际应用上，常常可以不必考虑这些問題而直接用上面的方法求解，得到了解以后，再来討論解应該符合那些条件就够了。

此外，依照这样形式进行計算时可能遇到发散积分。这时有一种方法叫做取发散积分的有限部分法。如果要把这些各种各样形式的計算方法作理論上的統一，那就要超出普通所用的函数概念的范圍。这也正就是产生 Schwartz 广义函数理論的原因之一（参看本丛书：广义函数）。

**2. 平面波的解**　下面要特别考虑常系数綫性方程的情形。先把常系数微分算子 $L$ 中一切阶数为 $\varkappa$ 的項集中起来，記以

$$P_\varkappa(\partial_x)=\sum_{(\nu)}a_{\nu_1\cdots\nu_\varkappa}\partial^\varkappa_{\nu_1\cdots\nu_\varkappa}. \tag{29.4}$$

于是对 $k$ 阶的算子 $L$，有写法

$$L[u]=\sum_{\varkappa=0}^{k}P_\varkappa(\partial_x)u. \tag{29.5}$$

$P_\varkappa(\xi)$ 对于 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 是 $\varkappa$ 次的齐次整式。此外，(29.5) 的主部是 $P_k(\partial_x)u$. 对于方程

$$L[u]=0, \tag{29.6}$$

超平面（$m-1$ 維的綫性流形）

$$\varphi(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu x_\nu - c = 0 \tag{29.7}$$

是特征面的条件为

$$\sum_{(\nu)} a_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\nu_1}\varphi\cdots\partial_{\nu_k}\varphi = P_k(\alpha)=0. \tag{29.8}$$

因此，如果 (29.6) 的特征方程 $P_k(\xi)=0$ 存在实解的話，那么就存在着实的特征平面 (29.7)（$c$ 是任意的）。

为了方便起見，引入写法 $\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu x_\nu=\alpha\cdot x$. 我們先求 (29.6) 具有形狀如

$$u=\varphi(\alpha\cdot x) \tag{29.9}$$

的解。把 (29.9) 代入 (29.6) 后，就得到

$$L[u]=\sum_{\varkappa=0}^{k}P_\varkappa(\partial_x)\varphi(\alpha\cdot x)=\sum_{\varkappa=0}^{k}P_\varkappa(\alpha)\varphi^{(\varkappa)}(s)_{s=\alpha\cdot x}=0. \tag{29.10}$$

首先考慮 $L[u]$ 仅具有主部的情形，即

$$L[u]=P_k(\partial_x)u=0.$$

这时，由于

$$P_k(\alpha)\varphi^{(k)}(s)_{s=\alpha\cdot x}=0,$$

如果选定 $\alpha$ 为满足方程 (29.8) 的数，那么可以認为 $\varphi(s)$ 是任意函数。具有形狀如 (29.9) 的解叫做**平面波**。这时，平面 $\alpha\cdot x=c$ 叫做**波面**，函数 $\varphi(s)$ 叫做**波形**。于是就得到了下面的定理：

**定理 29.1** 如 $L[u]$ 仅具有主部，且存在着实特征面，那么就存在着平面波的解，其波面为特征面，而波形是任意的。

其次再考慮一下具有主部以外各項的 $L[u]$. 对于任意的满足 $P_k(\alpha)\neq 0$ 的 $\alpha$，方程 (29.10) 对于未知函数 $\varphi(s)$ 成为 $k$ 阶的常系

数綫性常微分方程。这时，$\alpha$ 在满足 $P_k(\alpha)\neq 0$ 的限制下是任意的，但 $\varphi(s)$ 却只是 $k$ 个綫性独立的函数的綫性組合。至于这 $k$ 个独立函数的求法，具体的来說，可設

$$u=e^{\alpha\cdot x}, \tag{29.11}$$

由于

$$L[u]=\sum_{\varkappa=0}^{k}P_\varkappa(\alpha)e^{\alpha\cdot x}=0,$$

因此，对于满足

$$\sum_{\varkappa=0}^{k}P_\varkappa(\alpha)=0 \tag{29.12}$$

的任意的 $\alpha$，(29.11)就是(29.6)的解(平面波)。

**注意**　满足(29.12)的 $\alpha$ 不限定是实数，即使独立变数 $x$ 是实数，(29.6)的解也无妨是复数。要得到实的解，只要把复数解分成实部与虚部即可。

**例**　考慮以 $(t, x)=(t, x_1, \cdots, x_m)$ 为独立变数的正規抛物型方程

$$\partial_t u-\Delta_x u=0 \tag{29.13}$$

(热傳导方程)，以 $u=e^{\alpha t+\beta\cdot x}$ 为平面波，則得

$$\alpha-\sum_{\nu=1}^{m}\beta_\nu^2=0,$$

因此得到了解(平面波)

$$u=\exp(\sum\beta_\nu^2 t+\beta\cdot x).$$

当 $\beta(\neq 0)$ 为实数时，解当 $t\geqslant 0$ 时无界。为了要得到当 $t\geqslant 0$ 时有界的解，可試令

$$u=e^{\alpha t+i\beta\cdot x}\quad (i^2=-1).$$

这时 $\alpha=-\sum_{\nu=1}^{m}\beta_\nu^2$，所以当 $t\geqslant 0$ 时有界的平面波是

$$u(t, x, \beta)=\exp\{-(\sum\beta_\nu^2)t+i\beta\cdot x\}.$$

当 $t>0$ 时，由于 $u(t, x, \beta)$ 以及它的导数当 $|\beta|\to\infty$ 时急速的减少，所以下列多重积分

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-(\sum\beta_\nu^2)t+i\sum\beta_\nu x_\nu\}d\beta_1\cdots d\beta_m \tag{29.14}$$

收斂，并且 $u$ 对 $t$ 及 $x$ 任意次数的微分运算，都允許在积分号下施行。于是(29.14)也是(29.13)的解。为了計算积分，可設 $\sqrt{t}\,\beta_\nu=\xi_\nu$，$x_\nu/\sqrt{t}=\gamma_\nu$，

这样，就得到了

$$u=\frac{1}{\sqrt{t^m}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\sum\xi_\nu^2+i\sum\gamma_\nu\xi_\nu\right)d\xi_1\cdots d\xi_\nu.$$

再利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\xi^2+i\gamma\xi)\,d\xi=\sqrt{\pi}\,e^{-\gamma^2/4}$$

就能得到

$$u=\sqrt{\frac{\pi}{t}}^{\,m}\exp\left(-\frac{\sum\gamma_\nu^2}{4t}\right).$$

## §30 拟綫性方程的特征条件

**1. 二阶的面素組** 直到現在为止，为了容易理解，我們只討論了綫性方程，現在来說明一下拟綫性方程的特征条件。为了使后面的理論更加明确，先解释一下二阶的面素組。

首先对任意函数 $u=u(x)$，設

$$\partial_i u=p_i,\quad \partial_{ij}^2 u=r_{ij},\tag{30.1}$$

则以 $x$ 作为独立变数的全微分方程

$$du=\sum_{i=1}^{m}p_i dx_i,\quad dp_i=\sum_{j=1}^{m}r_{ij}dx_j\tag{30.2}$$

成立。如設独立变数 $x$ 是参数 $s=(s_1,\cdots,s_k)$ $(k\leqq m)$ 的函数 $x_i=X_i(s)$ $(i=1,\cdots,m)$，那么把 $(x,u,p,r)$ 都考虑成 $s$ 的函数时，它們之間将成立关系式(30.2)。

一般，这 $m+1+m+m^2$ 个量 $(x,u,p,r)=(x_1,\cdots,x_m,u,p_1,\cdots,p_m,r_{11},\cdots,r_{mm})$ $(r_{ij}=r_{ji})$ 所成的組称为二阶的面素。如果把它們看作 $k$ 个参数 $s$ 的函数，而(30.2)成立，那么就叫它們为($k$ 維的)**二阶面素組**或简称为**二阶带**。方程(30.2)叫做**二阶成带条件**。

对于二阶面素組，如用

$$s_\varkappa=s_\varkappa(t_1,\cdots,t_l)\quad(\varkappa=1,\cdots,k)\quad(l\leqq k)$$

来代替 $s$ 而以 $t$ 为参数，则它仍成为二阶面素組。特别对 $m$ 維的

二阶面素組，如

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_m)}{D(s_1, \cdots, s_m)} \neq 0,$$

則可以 $x$ 代替 $s$ 作为独立变数，于是由(30.2)就能导出(30.1)。

此外，对面素$(x^0, u^0, p^0, r^0)$，如有

$$p_i^0 = \partial_i u(x^0), \quad r_{ij}^0 = \partial_{ij}^2 u(x^0),$$

那么就說，曲面 $u=u(x)$ 含有二阶面素$(x^0, u^0, p^0, r^0)$。

为了与二阶面素对照，我們把§9中所說的面素$(x, u, p)$特別叫做**一阶面素**。对于一阶的面素組$(x, u, p)=\{x, u, p\}(s)$，滿足下列条件的二阶面素$(x^0, u^0, p^0, r^0)$

$$(x^0, u^0, p^0) = \{x, u, p\}(s^0), \quad dp_i = \sum_{j=1}^m r_{ij}^0 dx_j \quad (s=s^0)$$

(即在 $s=s^0$ 处成立二阶成带条件)叫做**迭在一阶面素組上的二阶面素**。

下面研究一下，当空間的变数由 $x$ 变成 $x'$ 时，求使二阶成带条件保持的二阶面素的变换式。这里应該加上条件

$$D(x_1', \cdots, x_m')/D(x_1, \cdots, x_m) \neq 0,$$

設 $u=u'$，由

$$\left.\begin{aligned} du &= \sum_{\mu=1}^m p_\mu' dx_\mu', \quad dp_\mu' = \sum_{\nu=1}^m r_{\mu\nu}' dx_\nu' \\ &\text{以及} \\ dx_\mu' &= \sum_{i=1}^m \partial_i x_\mu' dx_i, \quad d(\partial_i x_\mu') = \sum_{j=1}^m \partial_{ij}^2 x_\mu' dx_j, \end{aligned}\right\} \tag{30.3}$$

再从

$$du = \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^m p_\mu' \partial_i x_\mu' dx_i = \sum_{i=1}^m p_i dx_i,$$

得到

$$p_i = \sum_{\mu=1}^m p_\mu' \partial_i x_\mu',$$

此外因为

$$dp_i=\sum_{\mu=1}^{m}\partial_i x'_\mu d p'_\mu+\sum_{\mu=1}^{m} p'_\mu d(\partial_i x'_\mu)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}dx_j$$

及(30.3),所以成立

$$\left.\begin{aligned}p_i&=\sum_{\mu=1}^{m}p'_\mu\partial_i x'_\mu,\\ r_{ij}&=\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m}r'_{\mu\nu}\partial_i x'_\mu\partial_j x'_\nu+\sum_{\mu=1}^{m}p'_\mu\partial^2_{ij}x'_\mu.\end{aligned}\right\}\tag{30.4}$$

如在(30.4)中解出 $p'$, $r'$, 則由于

$$\sum_{\mu=1}^{m}\partial_i x'_\mu\partial'_\mu x_j=\delta_{ij},$$

$$\sum_{\mu=1}^{m}\partial^2_{ik}x'_\mu\partial'_\mu x_j+\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m}\partial_i x'_\mu\partial_k x'_\nu\partial'^2_{\mu\nu}x_j=0,$$

所以同样地能得到与(30.4)形状相同的逆变换

$$\left.\begin{aligned}p'_\mu&=\sum_{i=1}^{m}p_i\partial'_\mu x_i,\\ r'_{\mu\nu}&=\sum_{i,j=1}^{m,m}r_{ij}\partial'_\mu x_i\partial'_\nu x_j+\sum_{i=1}^{m}p_i\partial'^2_{\mu\nu}x_i.\end{aligned}\right\}\tag{30.5}$$

**2. 拟綫性方程的特征条件** 現在把二阶拟綫性微分方程($x$ 独立变数)考虑为二阶面素組 $\{x, u, p, r\}(x)$ 所满足的方程

$$\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}(x, u, p)r_{ij}+f(x, u, p)=0.\tag{30.6}$$

設在 $x$ 空間中給定一个用参数 $s$ 表示的曲面 $S$($m-1$ 維流形):

$$x_i=X_i(s), \quad s=(s_1, \cdots, s_{m-1}),$$

又在 $S$ 上給定一阶面素組作为初始組

$$(x, u, p)=\{X, U, P\}(s).\tag{30.7}$$

現在求迭在这初始組上并满足(30.6)的二阶面素組$(x, u, p, r)$.

把空間的变数由 $x$ 变成 $x'$,由(30.4),(30.6)就成为

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m}a'_{\mu\nu}(x', u, p')r'_{\mu\nu}+f'(x', u, p')=0,\tag{30.8}$$

这里

$$a'_{\mu\nu}=\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_i x'_\mu\partial_j x'_\nu=Q(x'_\mu,x'_\nu),$$

$$f'=f+\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\sum_{\mu=1}^{m}\partial^2_{ij}x'_\mu p'_\mu.$$

設 $\psi_i(x')$ 是 $x'$ 的这样的函数，它满足

$$\psi_i(x'_1,\cdots,x'_{m-1},0)=X_i(x'_1,\cdots,x'_{m-1})\quad(i=1,\cdots,m),$$

并且

$$\frac{D(\psi_1,\cdots,\psi_m)}{D(x'_1,\cdots,x'_m)}\neq 0,$$

则 $x=\psi(x')$（或其逆函数 $x'_\nu=\varphi_\nu(x)$）就定义了 $x$ 与 $x'$ 之間的变换，变换后，$S$ 就可用下列方程来表示

$$x'_1=s_1,\ \cdots,\ x'_{m-1}=s_{m-1},\ x'_m=0.$$

从而根据二阶成带条件，能够得到

$$\left.\begin{aligned}r'_{\mu\nu}&=\partial^2_{\mu\nu}u(s),\\ r'_{m\mu}&=\partial_\mu p'_m(s).\end{aligned}\quad(\mu,\nu=1,\cdots,m-1)\right\}\tag{30.9}$$

这样除了 $r'_{mm}$ 以外就可以唯一地确定出一切的 $r'_{\mu\nu}$。但如果沿着 (30.7)

$$a'_{mm}=Q(x'_m,x'_m)_{(x,u,p)(s)}\neq 0,\tag{30.10}$$

那么由 (30.8) 也就可以唯一确定 $r'_{mm}$。

如果沿着 (30.7)

$$a'_{mm}=Q(x'_m,x'_m)_{(x,u,p)(s)}=0,\tag{30.11}$$

那么根据 (30.8) 与 (30.9)，存在着满足方程 (30.6) 并且迭在 (30.7) 上的二阶面素組的充要条件是，对于初始面素組成立着下面的方程

$$2\sum_{\mu=1}^{m-1}a'_{m\mu}\partial_\mu p'_m(s)+\sum_{\mu,\nu=1}^{m-1,m-1}a'_{\mu\nu}\partial^2_{\mu\nu}u(s)+f'=0,\tag{30.12}$$

这时，由于 $r'_{mm}$ 是不定的，所以对 $S$ 的每个点，实际存在着 $\infty^1$ 个所求的二阶面素。

当 $S$ 表示为 $(x'_n=)\varphi(x)=0$ 时，如果对 $S$ 上的初始面素組(30.7)，

$$Q(\varphi,\varphi)_{(x,u,p)(s)}\neq 0,$$

那么就称(30.7)为**非特征的**。相反，如

$$Q(\varphi,\varphi)_{(x,u,p)(s)}=0,$$

那么就叫做**准特征的**。如(30.7)为准特征，且(30.12)成立，那末这样的(30.7)叫做**一阶特征带**。根据它的定义，成立下面定理。

**定理 30.1** 如 $S$ 上的初始面素組(30.7)为非特征，那么存在着唯一的满足(30.6)并迭在(30.7)上的二阶面素組。如(30.7)为准特征，所求的二阶面素組存在的充要条件是(30.7)为一阶特征带。这时存在着无穷多的二阶面素满足所求的条件。

# 第6章 椭圓型偏微分方程

本章主要講解二阶綫性椭圓型偏微分方程。由其主部系数所得的二次型是正定的，即 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j>0$ $(\xi\neq 0)$. 一般以 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 为独立变数。前章的許多記号在此仍照样使用。

## §31 边值問題

**1. Dirichlet 問題及 Neumann 問題** 正象 §20 中所說的，对典型的椭圓型方程即 Laplace 方程来說，始值問題是不适切的，而边值問題是适切的。故对椭圓型方程来說，边值問題比始值問題更为重要。事实上，在物理学等的自然要求下所产生的椭圓型方程的問題，常是边值問題而不是始值問題。

現在考慮二阶自伴椭圓型方程

$$L[u]=\sum_{i=1}^{m}\partial_i\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x)\partial_j u\Big)-c(x)u=f(x). \qquad (31.1)$$

設 $B$ 为 $m$ 維的有界开区域，它的边界 $\Gamma$ 是光滑曲面。以后如不特别申明，总設 $u(x)$ 为 $B$ 内二次連續可微的函数，而在 $B\cup\Gamma$ 上它是一次連續可微的。

如果在 $\Gamma$ 上已給定函数 $g(x)$，試求在 $B$ 内满足(31.1)，而在 $\Gamma$ 上等于 $g(x)$ 的解 $u$（即在 $\Gamma$ 上 $u=g(x)$），这样的問題叫做 **Dirichlet 問題**。另外求在 $B$ 内满足(31.1)，而在 $\Gamma$ 上成立 $\partial_N u=g_1(x)$ ($\partial_N u$ 是 $u$ 的余法綫导数)的解的問題，叫做 **Neumann 問題**。再如求这样的解 $u$，它在 $\Gamma$ 的一部分上满足 $u=g(x)$，但是在另一部分上满足 $\partial_N u=g_1(x)$，这种問題叫做混合問題。

現在特别考慮

$$c(x)\geqslant 0 \tag{31.2}$$

的情形。对这种情形，我們先来証明 Dirichlet 問題及 Neumann 問題解的唯一性。如果对同一边值問題存在着两个解的話，令它們的差为 $v$，则

$$\left.\begin{array}{lll}\text{当}\quad x\in B\ \text{时}, & L[v]=0, \\ \text{当}\quad x\in \Gamma\ \text{时}, & v=0\ \text{或是}\ \partial_N v=0.\end{array}\right\} \tag{31.3}$$

根据公式(26.11)(只要把 $c$ 换成 $-c$)，就有

$$\int_B\{Q(v,v)+cv^2\}d^n x+\int_B v\,L[v]d^n x=\int_\Gamma v\,\partial_N v dS.$$

于是由(31.3)有

$$\int_B\{Q(v,v)+cv^2\}d^n x=0. \tag{31.4}$$

由于 $Q(v,v)\geqslant 0$, $cv^2\geqslant 0$，所以

$$Q(v,v)=0,\qquad cv^2=0.$$

由第一式，就知道 $\partial_i v=0$，即 $v=$常数，因此对 Dirichlet 問題，必有 $v\equiv 0$. 此外对 Neumann 問題，如在 $B$ 内存在一点 $x^0$ 使得 $c(x^0)>0$，那么一定也有 $v\equiv 0$；如果 $c(x)\equiv 0$，则 $v=$常数，并且这个常数是完全任意的。对混合問題自然也有 $v\equiv 0$. 总的来說，除了当 $c(x)\equiv 0$ 时，Neumann 問題的两个解的差是任意常数外，对于其他的情形，上述的边值問題都存在着唯一的解。

**注意 1** 对于 Dirichlet 問題，即使 $L[u]$ 不是自伴的，或者不成立 $c\geqslant 0$，则只要对区域 $B$ 的大小与 $L[u]$ 的系数的大小之間規定某种适当关系(不等式)，仍能用上面的方法証明解的唯一性。証明从略。

如 $L[u]$ 是自伴的，由 Green 公式，对于任意的 $u$, $v$ 成立着

$$\int_B\{vL[u]-uL[v]\}d^m x=\int_\Gamma\{v\partial_N u-u\partial_N v\}dS.$$

特别当 $c\equiv 0$ 时，可設 $v=1$，由于 $L[v]=0$，及 $\partial_N v=0$，所以对(31.1)的解成立

$$\int_\Gamma \partial_N u\, dS=\int_B f(x)d^m x. \tag{31.5}$$

因此当 $c\equiv 0$ 时，Neumann 問題解存在的必要条件为，在 $\Gamma$ 上給定的 $\partial_N u=g_1(x)$ 应該滿足(31.5)。

**2. Dirichlet 原理** 对于任意的函数 $u$, $v$, 令

$$\int_B \{Q(u, v)+cuv\}d^m x=D[u, v]. \tag{31.6}$$

特别当 $u=v$ 时，就称积分 $D(u, u)$ 为 **Dirichlet 积分**。如果在 $B$ 内有 $c(x)\geqslant 0$ 的話，立刻就知道

$$D[u, u]\geqslant 0. \tag{31.7}$$

所以如果 $D[u, u]=0$，則在 $c\equiv 0$ 的情形，必有 $u=$常数；如在 $B$ 内有使 $c(x^0)>0$ 的点 $x^0$，則 $u\equiv 0$。

現在設 $u=u_0(x)$ 是方程 (31.1) 的 Dirichlet 問題的解，我們来研究关于和 $u_0(x)$ 有相同边界条件的函数 $u$ 的积分

$$J[u]=D[u, u]+2\int_B u\cdot f d^n x. \tag{31.8}$$

在这些 $u$ 中，当 $u=u_0(x)$ 时积分具有极小值。事实上，如在 $B$ 内 $u\not\equiv u_0$ 的話，由于 $D[u-u_0, u-u_0]>0$ (在 $\Gamma$ 上 $u-u_0=0$)，所以有

$$\begin{aligned}D[u, u]-D[u_0, u_0]&=D[u-u_0, u-u_0]+2D[u-u_0, u_0]\\&>2D[u-u_0, u_0],\end{aligned}$$

这样就得到

$$\begin{aligned}J[u]-J[u_0]&=D[u,u]-D[u_0, u_0]+2\int_B (u-u_0)fd^m x\\&>2\{D[u-u_0, u_0]+\int_B (u-u_0)fd^n x\}. \end{aligned}\tag{31.9}$$

再由公式(31.6)及(26.11)有

$$\begin{aligned}D[u-u_0, u_0]&=-\int_B (u-u_0)L[u_0]d^m x+\int_\Gamma (u-u_0)\partial_N u_0 dS\\&=-\int_B (u-u_0)fd^m x.\end{aligned}$$

所以根据(31.9)，就得到了

$$J[u] > J[u_0].$$

相反，如果 $u=u_0$ 是在 $\Gamma$ 上等于已給值，并且使 $J[u]$ 取极小($u$ 在 $B$ 内二次，在 $B\cup\Gamma$ 上一次連續可微)的函数，則 $u=u_0$ 是方程(31.1)的解。事实上，令 $u-u_0=w$，由于

$$J[u]-J[u_0]=D[w,w]+2D[w,u_0]+2\int_B wfd^nx,$$

所以对于 $B$ 的任意試驗函数 $w$，必有

$$D[w,w]+2D[w,u_0]+2\int_B wfd^nx\geqslant 0. \tag{31.10}$$

取 $\lambda w$ 代替 $w$($\lambda$ 是常数)，則有

$$\lambda^2 D[w,w]+2\lambda\left\{D[w,u_0]+\int_B wfd^nx\right\}\geqslant 0.$$

当 $\lambda$ 无限小时，因为第一項是二級的无穷小，所以一定成立如下的关系式

$$D[w,u_0]+\int_B wf\,d^nx=0. \tag{31.11}$$

現在由于

$$D[w,u_0]=\int_B\{Q(w,u_0)+cwu_0\}d^nx=-\int_B wL[u_0]d^nx,$$

所以根据(31.11)，对任意的試驗函数 $w$，必然成立

$$\int_B w\{L[u_0]-f\}\,d^nx=0.$$

于是再根据变分学基本引理，就有

$$L[u_0]-f=0.$$

根据上面所作的討論，Riemann 曾对 $L\equiv\Delta$ 情形的 Dirichlet 問題作过这样的断言：因为 Dirichlet 問題的解就是保留边界条件并且使得 $J[u]$ 成为极小的函数 $u$，所以可以保証这种函数必定存在。这个断言叫做 **Dirichlet 原理**。但是現在还有下面两个

問題:

在已給定的边界条件下,

(i) 对 $J[u]$ 是否存在着使它取极小值的函数?

(ii) 使 $J[u]$ 为极小值的函数是否二次連續可微?(因为 $J[u]$ 中只含有 $u$ 的一阶导数而不含有 $u$ 的二阶导数。)

对于 Riemann 由直观所得到的断言, Weierstrass 从理論的观点曾加以批判,并举出了变分学中不存在极小值的例題,以非难 Riemann 的論点。这样就使得从直观方面看来是正确的 Riemann 方法,从数学方面来看,不能符合严密的要求。后来 Hilbert 重新研究了这种方法,并且成功地为它建立了严密的理論基础。这方法以后还經过 Weyl, Courant 等人的研究。近来, Friedrichs 等曾指出,对于一般高阶的椭圆型方程,如把函数族表示在 Hilbert 空間内,对于方程的广义解, (i) 几乎是不証自明的事情;此外,由于对广义解的正则性建立了一般的証明方法,从而能証明(ii)也成立。

**注意 2** 如存在着使 $J[u]$ 取极小值的 $u_0$($u_0$ 一次連續可微),那么容易理解, $u_0$ 必是(31.1)的广义解。事实上,对于 $u_0$ 及任意的試驗函数 $w$, 公式(31.11)必成立。于是根据公式(26.11)有

$$D[w, u_0] = -\int_B u_0 L[w] d^m x,$$

由于 $L = L^*$, 所以

$$\int_B u_0 L^* [w] d^m x = \int_B w f d^m x.$$

即 $u_0$ 是方程(31.1)的广义解(弱解)。

如 $L[u]$ 不是自伴的,那么就不成立 Dirichlet 原理。但是最近有了关于 Hilbert 空間泛函表現定理(Riesz 定理)的变形定理,即 Lax-Milgram 定理,以它为基础可以証明一般椭圓型方程广义解的存在定理。Riesz 表現定理与 Dirichlet 原理是同类型的,它基于 Hilbert 空間"正射影存在"的事实。但是由于它脱离了极值存在的形式,而用泛函表現的形式出現,所以成了解决問題的眞正有力工具(参看本丛书:泛函分析)。对于这种近代理論, H. Weyl 及小平邦彥是这方面工作的先驅者。

**3. Dirichlet 問題解的唯一性** 如 $L[u]$ 不是自伴的、并且 $c$ 不一定 $\leq 0$，則恰好使 Dirichlet 問題唯一性成立的充分条件，可以从一种微分不等式得到。根据这种方法，只要假定解在 $B$ 内二次連續可微、并在 $B\cup\Gamma$ 上連續，就能保証解的唯一性。此外对 $B$ 的边界 $\Gamma$ 也不需要假設它的光滑性。設

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_{ij}^2u+\sum_{j=1}^{m}b_j\partial_ju+c(x)u, \qquad (31.12)$$

則成立下面的定理。

**定理 31.1** 如存在着这样的函数 $\omega(x)$，它在 $B\cup\Gamma$ 上連續，在 $B$ 内二次連續可微，并且还滿足下列条件

$$\text{在 } B\cup\Gamma \text{ 上，} \omega(x)>0;\quad \text{在 } B \text{ 内，} L[\omega]<0. \qquad (31.13)$$

那么对于 $B$ 的 Dirichlet 問題的解就只可能有一个。

**証** 現在只要証明对于 (31.12) 的解 $u$，如果在 $\Gamma$ 上 $u=0$，那么必是 $u\equiv 0$ 卽可。我們首先証明在 $B$ 中，必然成立

$$u(x)\leq 0. \qquad (31.14)$$

設 $\lambda$（常数）是相当大的正数，显然就有

$$\lambda\omega(x)>u(x)\quad (x\in B\cup\Gamma). \qquad (31.15)$$

如果(31.14)不成立，那么对一切滿足 (31.15) 的 $\lambda$ 一定存在着下限 $\lambda_0$，并且 $\lambda_0>0$。令

$$w(x)=\lambda_0\omega(x)-u(x),$$

則在 $B$ 内存在着这样的点 $x^0$，使得

$$w(x)\geq 0\quad (x\in B),\quad w(x^0)=0 \qquad (31.16)$$

(在 $\Gamma$ 上 $w>0$)。于是 $w$ 在 $x=x^0$ 处有极小值，所以必有

$$\partial_i w(x^0)=0\quad (i=1,\cdots,m). \qquad (31.17)$$

又由(31.12)及(31.13)有

$$L[w]=\lambda_0L[\omega]-L[u]<0.$$

由这个式子及(31.16)，(31.17)，就得到

$$L[w](x^0)=\left(\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_{ij}^2 w\right)(x^0)<0. \tag{31.18}$$

现在利用綫性变换

$$x'_\mu=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{\mu i}x_i \tag{31.19}$$

把独立变数 $x$ 变成 $x'$，得到

$$\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_{ij}^2 w=\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m}a'_{\mu\nu}\partial'^2_{\mu\nu}w,$$

其中

$$a'_{\mu\nu}=\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\alpha_{\mu i}\alpha_{\nu j}.$$

因而适当地选擇变换(31.19)后，就可以使

$$a'_{\mu\nu}(x^0)=\delta_{\mu\nu}.$$

因为 $w$ 在 $x=x^0$ 处为极小，所以应有

$$\left(\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_{ij}^2 w\right)(x^0)=\left(\sum_{\mu=1}^{m}\partial'^2_{\mu\mu}w\right)(x^{0\prime})\geqslant 0,$$

这个結果与(31.18)矛盾，所以(31.14)非成立不可。

此外，如果考虑以 $-u$ 代替 $u$，还能够証明 $u\geqslant 0$。所以必有 $u\equiv 0$。　　証毕

如 $c(x)>0$，可取 $\omega(x)\equiv 1$，则

$$L[\omega]<0,$$

于是根据定理 31.1，就知道 Dirichlet 問題的解必是唯一的。如 $c\geqslant 0$，由于 $a_{ii}>0$，所以存在着满足下列条件的常数 $\alpha$ 及 $\beta$，

$$a_{ii}\geqslant\alpha>0,\qquad b_i\leqslant\beta.$$

設 $x^0$ 是 $B$ 内的任一点，令

$$\omega(x)=1-\varepsilon e^{-\varkappa(x_1-x_1^0)}\quad(\varepsilon>0,\ \varkappa>0).$$

当 $\varepsilon$ 相当小时，因为在 $B\cup\Gamma$ 上 $\omega(x)>0$，所以

$$\begin{aligned}L[\omega]&=-\varepsilon(a_{11}\varkappa^2-b_1\varkappa)e^{-\varkappa(x_1-x_1^0)}-c\omega\\&\leqslant-\varepsilon(\alpha\varkappa^2-\beta\varkappa)e^{-\varkappa(x_1-x_1^0)}.\end{aligned}$$

因此，如果确定$\varkappa$，使得$\alpha\varkappa>\beta$（与$\varepsilon$无关），则有$L[\omega]<0$。于是問題的解也必是唯一的。

此外，即使$c(x)$的符号可变，但

$$\begin{aligned}&\operatorname{diam}(B)=d, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \geqslant \alpha>0,\\ &\sqrt{\sum b_i^2} \leqslant \beta, \qquad \operatorname{Max}\{c(x), 0\} \leqslant \gamma,\end{aligned} \tag{31.20}$$

则可取

$$\omega(x)=d^2-\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2.$$

由于在$B\cup\Gamma$上$\omega(x)>0$，所以

$$\begin{aligned}L[\omega]&=-2\sum_{i=1}^{m} a_{ii}-2\sum_{i=1}^{m} b_i(x_i-x_i^0)-c\omega\\ &<-2\alpha+2\beta d+\gamma d^2.\end{aligned}$$

如果适当地选择$d$，譬如令$d$相当小，使得

$$2\beta d+\gamma d^2<2\alpha, \tag{31.21}$$

则$L[\omega]<0$，从而根据定理31.1就知道这样的Dirichlet問題也只能有唯一的解。

**定理 31.2** 如$c(x)\geqslant 0$，则Dirichlet問題的解是唯一的。此外如果区域$B$相当的小[即由(31.20)所給定的数$\alpha,\beta,\gamma,d$，滿足条件(31.21)时]，Dirichlet問題的解仍然是唯一的。

**注意 3** 条件(31.21)在一定意义下可以認为是最好的了，即如果条件不成立的話，那么Dirichlet問題的解就不一定是唯一的，譬如

$$u=a\sin x\sin y \qquad (a\text{ 任意常数})$$

为方程

$$u_{xx}+u_{yy}+2u=0$$

的解。如取$B$为区域$0<x<\pi$，$0<y<\pi$，则在$B$的边界$\Gamma$上滿足$u=0$的解就不是唯一的。

在§17中所說的Haar不等式，以及定理31.1中所說的微分不等式，对于某些情形，的确是解决問題的有效工具。但是，作为現代偏微分方程理論基

础的，还是那些由 Dirichlet 积分的启发而得到的各种关于积分的不等式。

## §32 Laplace 方程和 Poisson 方程

**1. Laplace 方程的基本解** 本节略为介紹一些关于最簡单的椭圆型偏微分方程，即 Laplace 方程与 Poisson 方程的性质。我們先来研究 Laplace 方程

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{m}\partial_i^2 u=0. \tag{32.1}$$

这个方程的解一般叫做調和函数也叫势函数。現在如果在 Green 积分公式中取 $L(=L^*)=\Delta$, $v=1$, 則由于 $\Delta u=\Delta v=0$, 而余法綫与曲面法綫完全一致，所以对于在 $B\cup\Gamma$（$\Gamma$ 为区域 $B$ 的边界）上一次連續可微，而在 $B$ 内調和的函数一定成立

$$\int_\Gamma \partial_n u dS=0 \quad (\partial_n u \text{ 是 } u \text{ 的法綫导数}). \tag{32.2}$$

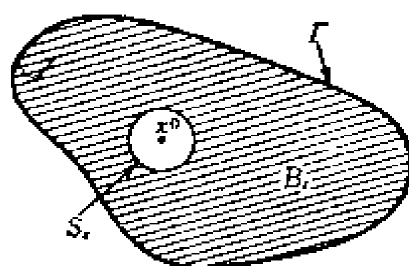


图 32.1

現在我們再考虑調和函数 $u$ 以 $B$ 内一点 $x^0$ 为奇异点的情形。以 $x^0$ 为中心，相当小的 $\varepsilon$ 为半徑，作一个球面 $S_\varepsilon$，并把 $B$ 内除去 $S_\varepsilon$ 的内部所成的区域叫做 $B_\varepsilon$（見图 32.1），那么，(32.2) 对于 $B_\varepsilon$ 也适用。$B_\varepsilon$ 的边界为 $\Gamma$ 与 $S_\varepsilon$，由于 $S_\varepsilon$ 的内部現在算为 $B_\varepsilon$ 的外部，所以有

$$\int_\Gamma \partial_n u dS=\int_{S_\varepsilon}\partial_n u dS. \tag{32.3}$$

这个积分值与 $\varepsilon$ 无关（只要 $S_\varepsilon$ 落在 $B$ 内即可）。

設由 $B$ 内定点 $x^0$ 到任一点 $x$ 的距离为

$$r=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}, \tag{32.4}$$

現在求形式如 $u=\phi(r)$ 的調和函数。注意关系式 $\partial_i r=(x_i-x_i^0)/r$,

对 $u$ 二次微分后，就有

$$\Delta u=\phi''+\frac{m-1}{r}\phi'=0.$$

这个方程可以看作 $\phi(r)$ 的常微分方程，从而得到

$$\phi=\begin{cases}c\log r+c' & (m=2\text{ 时}),\\ cr^{2-m}+c' & (m\geqslant 3\text{ 时}).\end{cases}$$

至于积分常数 $c'$，可以根据条件

$$\int_{S_\varepsilon}\partial_n u\,dS=-1 \tag{32.5}$$

来决定。因为对于球面 $S_\varepsilon$ 有 $\partial_n u=\phi'(r)$，所以

$$c=\begin{cases}-1/2\pi & (m=2\text{ 时}),\\ 1/(m-2)\omega_m & (m\geqslant 3\text{ 时}),\end{cases}$$

这里 $\omega_m$ 表示 $m$ 維单位球的面积，卽 $\omega_m=2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$。对于这样的 $\phi(r)$，再加上任意一个在整个 $B$ 域正則的調和函数 $w(x, x^0)$（$x^0$ 作为参数）后，就得到

$$u=\Phi(x, x^0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{r}+w(x, x^0) & (m=2),\\ \dfrac{1}{(m-2)\omega_m}r^{2-m}+w(x, x^0) & (m\geqslant 3).\end{cases} \tag{32.6}$$

它叫做 Laplace 方程以 $x^0$ 为奇异点的**基本解**，也叫做**初等解**，它是方程(32.1)的解，并且对于奇异点 $x^0$ 满足条件(32.5)。

**2. Poisson 方程** (32.1)右边为已知函数 $f(x)$ 的方程

$$\Delta u=f(x) \tag{32.7}$$

叫做 **Poisson 方程**。利用 Laplace 方程的基本解能得到这种方程的解。为此，对区域 $B_\varepsilon$ 应用 Green 公式(显然是适用的)。由于 $L(=L^*)=\Delta$，所以对任意函数 $u$ 及基本解 $v=\Phi(x, x^0)$，

$$\int_{B_\varepsilon}\Phi\cdot\Delta u\,d^m x=\left(\int_\Gamma-\int_{S_\varepsilon}\right)\{\Phi\partial_n u-u\partial_n\Phi\}\,dS. \tag{32.8}$$

首先我們来証明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\int_{S_\varepsilon}\Phi\partial_n u dS\to 0,\qquad \int_{S_\varepsilon}u\partial_n\Phi dS\to -u(x^0).\qquad (32.9)$$

先选定这样的常数 $\mu$, $\varkappa$，使得在 $x=x^0$ 的邻域内，$|\partial_n u|\leqslant\mu$，$|\Phi|\leqslant\varkappa r^{2-m}$。由于在 $S_\varepsilon$ 上有 $dS=\varepsilon^{m-1}d\omega$（$d\omega$ 单位球面面素），所以

$$\left|\int_{S_\varepsilon}\Phi\partial_n u dS\right|\leqslant\omega_m\mu\varkappa\varepsilon.$$

于是(32.9)中的第一式成立。再因为当 $u=\Phi$ 时，(32.5)成立，所以

$$\int_{S_\varepsilon}u\partial_n\Phi dS=-u(x^0)+\int_{S_\varepsilon}\{u-u(x^0)\}\partial_n\Phi dS.$$

現在选定常数 $\mu$, $\varkappa$，使得在 $x=x^0$ 的邻域内成立着 $|u-u(x^0)|\leqslant\mu r$，$|\partial_n\Phi|\leqslant\varkappa r^{1-m}$，这样就有

$$\left|\int_{S_\varepsilon}\{u-u(x^0)\}\partial_n\Phi dS\right|\leqslant\omega_m\varkappa\mu\varepsilon,$$

于是(32.9)中的第二式也成立。

最后，在(32.8)式，令 $\varepsilon\to 0$ 取其极限，就得到公式

$$u(x^0)=-\int_B\Phi\Delta u d^m x+\int_\Gamma\{\Phi\partial_n u-u\partial_n\Phi\}dS.\qquad (32.10)$$

对于 Laplace 方程的基本解 $\Phi(x, x^0)$，如果当 $x$ 在 $\Gamma$ 上时，它满足 $\Phi(x, x^0)=0$，那就特别称它为区域 $B$ 的 **Green 函数**，并記作 $\Phi(x, x^0)=G(x,x^0)$。相反，如果 $G(x, x^0)$ 是关于区域 $B$ 的 Green 函数，那么对(32.7)的任一解 $u$，根据(32.10)可以写成

$$u(x^0)=-\int_B G(x, x^0)f(x)d^m x-\int_\Gamma\partial_n G(x, x^0)u(x)dS.$$
$$(32.11)$$

因此，知道了 Green 函数后，如果 Poisson 方程的 Dirichlet

問題的解存在的話，那么这个解在 $x^0$ 处的值就可以根据公式(32.11)来求。但是这样还留下一个問題，卽对于任意的 $f(x)$，以及任意給定的 $u$ 在 $\Gamma$ 上的值，(32.11) 是否是 Dirichlet 問題的解呢？

下面我們証明，如果基本解中的 $w(x, x^0)=0$，卽当

$$\Phi(x, x^0)=\phi(x-x^0) \tag{32.12}$$

时，对任意給定的函数 $f(x)$，

$$u(x)=-\int_B \phi(x'-x)f(x')d^m x \tag{32.13}$$

确是(32.7)的一个解。

設 $x^0$ 是 $B$ 内任意一点。适当地选擇 $\delta>0$，就可以使得范圍 $|x-x^0|<2\delta$ 完全落在 $B$ 的内部。再設 $\rho(x)$ 是这样二次連續可微的函数，当 $|x-x^0|\leqslant\delta$ 时 $\rho(x)=1$，当 $|x-x^0|\geqslant 2\delta$ 时，$\rho(x)=0$。令

$$\rho(x)f(x)=f_0(x), \qquad f(x)-f_0(x)=f_1(x),$$

則当

$$|x-x^0|\geqslant 2\delta \text{ 时}, \qquad f_0(x)=0;$$
$$|x-x^0|\leqslant \delta \text{ 时}, \qquad f_1(x)=0,$$

并且

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x). \tag{32.14}$$

現在令

$$u_\alpha(x)=-\int_B \phi(x'-x)f_\alpha(x')d^m x' \quad (\alpha=0, 1), \tag{32.15}$$

由于当 $x\neq x'$ 时，$\phi(x'-x)$ 是調和函数，所以

$$u_1(x)=-\int_{B,\ |x'-x^0|>\delta} \phi(x'-x)f_1(x')d^m x'$$

在 $|x-x^0|<\delta$ 内，必定满足方程

$$\Delta u_1(x)=0. \tag{32.16}$$

再由于当 $|x-x^0|\geqslant 2\delta$ 时，$f_0(x)=0$，所以可假設在 $B$ 的外部仍有 $f_0(x)=0$，而把积分区域考虑为整个的空間。这时我們可省略积分区域的記号，而有

$$u_0(x)=-\int\phi(x'-x)f_0(x')d^m x'=-\int\phi(x')f_0(x+x')d^m x'.$$

于是，如果 $f(x)$ 二次連續可微，則有

$$\begin{aligned}\Delta u_0(x)&=-\int\phi(x')\Delta f_0(x+x')d^m x'\\&=-\int\phi(x'-x)\Delta f_0(x')d^m x'.\end{aligned}\qquad(32.17)$$

如在公式(32.10)中取 $u=f_0(x)$，則因为 $\Phi=\phi$，而在 $\Gamma$ 上有 $f_0=\partial_n f_0=0$，所以有

$$f_0(x)=-\int\phi(x'-x)\Delta f_0(x')d^m x'.$$

因此由(32.17)得到

$$\Delta u_0=f_0(x).$$

从这个公式，以及(32.14)，(32.15)，(32.16)，就可以証明当 $|x-x^0|<\delta$ 时，成立

$$\Delta u=f(x).$$

因为 $x^0$ 是 $B$ 内任意一点，所以(32.13)是(32.7)的解。

**注意 1**　在(32.10)及(32.11)中假設了 $\Phi$ 以及 $G$ 对于变数 $x$，在区域 $B\cup\Gamma$ 上連續可微。又在上面証明(32.13)满足方程(32.7)的过程中，會假設 $f(x)$ 二次連續可微。但事实上，只要假設 $f(x)$ 一次連續可微，或者满足較弱的 Hölder 条件

$$|f(x')-f(x)|\leqslant\varkappa|x'-x|^\alpha\quad(0<\alpha\leqslant 1)\qquad(32.18)$$

就够了。設 $m\geqslant 3$（当 $m=2$ 时証法一样）。为了証明这个論断，代替 $\phi(r)$ $(r=|x-x'|)$ 我們考虑下面的函数：

$$\phi_\delta(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{(m-2)\omega_m}r^{2-m} & (r\geqslant\delta\text{ 时}),\\[2ex] \dfrac{1}{2\omega_m\delta^m}\left(\dfrac{m\delta^2}{m-2}-r^2\right) & (r<\delta\text{ 时}).\end{cases}$$

$\phi_\delta$ 是一次連續可微的函数，至于它的二阶导数，在 $r=\delta$ 处虽不連續，但是有界（$r>\delta$ 时，$\phi_\delta=\phi(r)$），即有

$$0\leqslant r<\delta \text{ 时}\quad \partial^2_{ij}\phi_\delta=\frac{-\delta^{-m}}{\omega_m}\delta_{ij}.$$

所以令

$$u_\delta(x)=-\int_B\phi_\delta(r)f(x')d^m x'$$

后，則有

$$\partial_i u_\delta(x)=-\int_B\partial_i\phi_\delta(r)f(x')d^m x',$$

$$\partial^2_{ij}u_\delta(x)=-\int_B\partial^2_{ij}\phi_\delta(r)f(x')d^m x'.$$

由于 $|\phi_\delta|\leqslant\mu r^{2-m}$，$|\partial_i\phi_\delta|\leqslant\mu' r^{1-m}$（$\mu$, $\mu'$ 常数），所以可以理解，当 $\delta\to0$ 时，$u_\delta(x)$ 及 $\partial_i u_\delta(x)$ 都是一致收斂的。其次，由于

$$\partial^2_{ij}u_\delta=-\left(\int_{|x'-x|<\delta}+\int_{B,|x'-x|>\delta}\right)\partial^2_{ij}\phi_\delta(r)f(x')d^m x'$$

$$=\frac{\delta_{ij}}{\omega_m\delta^m}\int_{|x'-x|<\delta}f(x')d^m x'+\int_{B,|x'-x|>\delta}\partial^2_{ij}\phi(r)f(x')d^m x',$$

所以当 $\delta\to0$ 时，右边的第一个积分一致收斂于 $m^{-1}\delta_{ij}f(x)$。又从(32.18)与 $|\partial^2_{ij}\phi|\leqslant\mu'' r^{-m}$（$\mu''$ 常数），并利用

$$\int_{\delta'<|x'-x|<\delta}\partial^2_{ij}\phi(r)d^m x'=0,$$

則得

$$\left|\int_{\delta'<|x'-x|<\delta}\partial^2_{ij}\phi(r)f(x')d^m x'\right|$$

$$=\left|\int_{\delta'<|x'-x|<\delta}\partial^2_{ij}\phi(r)\{f(x')-f(x)\}d^m x'\right|\leqslant\varkappa\mu''\alpha^{-1}\omega_m\delta^\alpha,$$

所以当 $\delta\to0$ 时，$\partial^2_{ij}u_\delta$ 是一致收斂的。但是 $u$ 二次連續可微，因此有

$$\partial^2_{ij}u(x)=\frac{\delta_{ij}}{m}f(x)+\lim_{\delta\to0}\int_{B,|x'-x|>\delta}\partial^2_{ij}\phi(r)f(x')d^m x'.$$

另一方面，当 $x\neq x'$ 时，$\Delta\phi=0$，于是从上式可得到 $\Delta u=f(x)$。

**3. Poisson 积分** 当任意給定了 $f(x)$ 时，利用(32.13)就可求得 Poisson 方程(32.7)的一个解。这就是說，只要得到 Laplace 方程对任意边界值的 Dirichlet 問題的解，就能得到 Poisson 方程

相应問題的解。对于区域是一般的情形，問題并不簡单。但是如果 $B$ 是球体，則用 Poisson 积分就能得到解。我們在§20中已經講过 $m=2$ 的情形，現在来說明 $m\geqslant 3$ 的情形。

設 $x^0$ 是单位球 $|x^0|<1$ 內的一个点，$x^0$ 对单位球面的鏡象点是 $x^{0\prime}=x^0/|x^0|^2$。如 $x\neq x^{0\prime}$ 則 $(|x^0||x-x^{0\prime}|)^{2-m}$ 是以 $x$ 为变数的調和函数，由于 $|x^{0\prime}|>1$，所以函数

$$G(x, x^0)=\frac{1}{(m-2)\omega_m}\{|x-x^0|^{2-m} \\ -(|x^0||x-x^{0\prime}|)^{2-m}\} \tag{32.19}$$

在 $|x|<1$ 是 Laplace 方程的基本解。令

$$\sum_{i=1}^{m} x_i x_i^0 = x\cdot x^0,$$

則(32.19)可以写成下面的形状

$$G(x, x^0)=\frac{1}{(m-2)\omega_m}\{(|x|^2+|x^0|^2-2x\cdot x^0)^{2-m} \\ -(1+|x^0|^2|x|^2-2x\cdot x^0)^{2-m}\}.$$

由此可見，当 $|x|=1$ 时，$G(x, x^0)=0$，故 $G(x, x^0)$ 就是关于单位球 $|x|<1$ 的 Green 函数。其次，容易証明

$$G(x, x^0)=G(x^0, x). \tag{32.20}$$

如果令 $|x|=\rho$，$|x^0|=r$，$x^0\cdot x=r\rho\cos\theta$，則有

$$\partial_n G|_{|x|=1}=\frac{-1}{(m-2)\omega_m}\partial_\rho\{(\rho^2+r^2-2r\rho\cos\theta)^{\frac{2-m}{2}} \\ -(1+r^2\rho^2-2r\rho\cos\theta)^{\frac{2-m}{2}}\}_{\rho=1}$$

$$=\frac{-1}{\omega_m}\frac{1-r^2}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{m/2}}.$$

假設所求的解 $u$ 存在的話，把 $x^0$ 写成一般的 $x$，并在单位球面 $S:|\xi|=1$ 上給定了 $u=g(\xi)$，則根据 (32.11) 就能得到下列的 Poisson 积分公式

$$u(x)=\frac{1}{\omega_m}\int_S\frac{(1-r^2)g(\xi)}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{m/2}}dS(\xi) \qquad (32.21)$$

$$(r=|x|,\quad \cos\theta=\xi\cdot x/r).$$

反过来，当任意給定了連續函数 $g(\xi)$ 时，我們現在来証明，(32.21)表示一个調和函数 $u$，并在 $S$ 上有 $u=g(\xi)$。根据(32.20)，当 $x\neq\xi$ 时，$G(\xi,x)$ 关于 $x$ 是調和的。于是 $\partial_n G(\xi,x)$ 当 $|\xi|=1$，而 $|x|<1$ 时也是 $x$ 的調和函数。因为(32.21)实际上就是公式

$$u(x)=\int_S\partial_n G(\xi,x)g(\xi)dS(\xi)$$

的詳細的写法，所以 $u(x)$ 当 $|x|<1$ 时是 $x$ 的調和函数。此外，还可以象§20中的情形一样，証明当 $x\to\xi^0$ 时 $u(x)\to g(\xi^0)$。

于是对于区域是球的情形，已証明了 Poisson 方程的 Dirichlet 問題解的唯一性(因为調和函数經过相似变換仍然变成調和函数)。

此外，在(32.21)中如設 $r=0$，則有

$$u(0)=\frac{1}{\omega_m}\int_S g(\xi)dS(\xi). \qquad (32.22)$$

即：調和函数在球中心处的值是它在球表面上的值的平均值。

注意 2　当 $m=2$ 时，已經知道 Laplace 方程对于圓的 Dirichlet 問題是可解的。但是对于平面上由簡单閉曲綫 $\Gamma$ 所圍成的区域 $B$，恒可用等角映象映在单位圓上(映象为1-1对应并且直到边界連續)，所以也就能解决关于区域 $B$ 的 Dirichlet 問題。但是当 $m\geq 3$ 时，一般不能用等角映象使球与一般的区域相对应，所以需要用別的方法来討論。另外，調和函数还具有种种特殊的性質，詳細的討論此处从略(参看井上正雄：势函数論)。

## §33　二阶椭圓型方程的基本解

**1. 基本解**　本节的目的，是把前节中所定义的基本解扩張到一般的二阶椭圓型方程的情形。設

$$L[u]=\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x)\partial_j u\right)+\sum_{i=1}^{m}\beta_i(x)\partial_i u+c(x)u, \quad (33.1)$$

这里 $a_{ij}$, $\beta_i$, $c$ 都是 $x$ 的一次連續可微函数。

对于任意給定的一次連續可微函数 $f(x)$，如果

$$u(x)=-\int_B V(x, y)f(y)d^m y, \quad (33.2)$$

$$y=(y_1, \cdots, y_m)$$

是方程

$$L[u]=f(x) \quad (33.3)$$

的解，那么就称 $V(x, y)$ 为 $L[u]=0$ 的**基本解**，也叫**初等解**。

如果 $u$ 是方程(33.3)的解，那么它也是方程的广义解，所以对于区域 $B$ 的任意試驗函数 $w$，必然成立着

$$\int_B uL^*[w]d^m x=\int_B f\cdot wd^m x. \quad (33.4)$$

現在根据(33.2)，有

$$\int_B uL^*[w]d^m x=-\int_B\left\{\int_B V(x, y)f(y)d^m y\right\}L^*[w](x)d^m x$$

$$=-\int_B\left\{\int_B V(x, y)\cdot L^*[w](x)d^m x\right\}f(y)d^m y.$$

于是从(33.4)有

$$-\int_B\left\{\int_B V\cdot L^*[w]d^m x\right\}f(y)d^m y=\int_B f(y)w(y)d^m y.$$

因为函数 $f(x)$ 是任意的，所以对于 $B$ 的任意試驗函数 $w$ 成立

$$-\int_B V(x, y)\cdot L^*[w](x)d^m x=w(y). \quad (33.5)$$

反过来，对于用(33.2)所定义的 $u$，由(33.5)就能証明(33.4)必然成立。这也就是説 $u$ 是(33.3)的广义解(見注意2)。

現在更具体地来討論一下具有下列性質的 $V(x, y)$：

(i) 設 $V(x, y)$，$\partial_i V(x, y)$，$\partial_{ij}^2 V(x, y)$ 对 $x, y\in\bar{B}$($B$ 的閉包)，当 $x\neq y$ 时，都是 $x, y$ 的連續函数($\partial_i$ 是对 $x_i$ 所作的微分)。

(ii) $$L_x[V(x, y)]=0 \quad (x\neq y). \tag{33.6}$$

$L_x$ 表示关于 $x$ 的微分算子。

(iii) 設 $S_\varepsilon(y)$ 是以点 $y$ 为中心，$\varepsilon$ 为半徑的球面，并有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon(y)}\partial_N V(x, y)dS(x)=-1. \tag{33.7}$$

(iv) $$\partial_i V(x, y)=O(|x-y|^{1-m}) \quad (i=1, \cdots, m). \tag{33.8}$$

現在来証明，对于满足上列条件的 $V(x, y)$，(33.5) 成立（$w$ 为任意的試驗函数）。首先由(33.8)容易地有

$$V(x, y)=O(|x-y|^{2-m}). \tag{33.9}$$

如果令 $B$ 中除去 $S_\varepsilon$ 内部的区域为 $B_\varepsilon$，对这个区域令 $u=V(x, y)$，$v=w(x)$，并使用 Green 公式(26.10)，由于在 $\Gamma$ 上有 $w=\partial_N w=0$，所以由(33.6)有

$$\int_{B_\varepsilon}V\cdot L^*[w]d^m x$$

$$=-\int_{S_\varepsilon(y)}\{V\cdot(\partial_N w+\beta_n w)-w\partial_N V\}dS(x). \tag{33.10}$$

在 $y$ 的邻域内 $\partial_N w+\beta_n w$ 有界。此外，根据(33.8)，由于对 $x\in S_\varepsilon(y)$，

$$\partial_N V=O(\varepsilon^{1-m}), \quad S_\varepsilon(y)\text{的面积}=O(\varepsilon^{m-1}), \tag{33.11}$$

所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\int_{S_\varepsilon(y)}V\cdot(\partial_N w+\beta_n w)dS(x)\to 0, \tag{33.12}$$

而由(33.11)及 $w(x)$ 的連續性，有

$$\int_{S_\varepsilon(y)}\{w(x)-w(y)\}\partial_N V(x, y)dS(x)\to 0, \tag{33.13}$$

又根据(33.7)及(33.13)可知

$$\int_{S_\varepsilon(y)}w\partial_N V\,dS(x)\to -w(y). \tag{33.14}$$

最后由(33.10)，(33.12)，(33.14)，就得到(33.5)。

对于满足 (i), (ii), (iii), (iv) 的 $V(x, y)$, 如果根据(33.2)所得到的 $u(x)$ 是二次連續可微的話, 那么 $V(x, y)$ 就是 $L[u]$ 的(純正)基本解。以后我們規定, 把具有性質(i), (ii), (iii), (iv)的函数 $V(x, y)$, 叫做 $L[u]=0$ 的基本解。

在 § 32 中已經給出了 Laplace 方程的基本解。現在考虑常系数方程(仅其主部)

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\partial_{ij}^2 u=0 \tag{33.15}$$

的情形。

設系数所成矩陣 $(a_{ij})$ 的逆陣是 $(a_{ij})^{-1}$, 于是有

$$(a_{ij})^{-1}=(A_{ij}), \quad \det(a_{ij})=|a|. \tag{33.16}$$

令

$$r(x, y)=\sqrt{\sum_{i,j}^{m,m} A_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)},$$

并令

$$V(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{|a|}}\log\{1/r(x, y)\} & (m=2),\\[2ex] \dfrac{1}{(m-2)\omega_m\sqrt{|a|}}r(x,y)^{2-m} & (m\geqslant 3),\end{cases} \tag{33.17}$$

那么就能够証明 $V(x, y)$ 是 (33.15) 的基本解。事实上, 利用独立变数間的一次变换 $x'=Tx$ ($T$ 是常系数的矩陣), 就能够把(33.17)变成方程 $\Delta u=0$ 的基本解(32.6)。証明如下:

当独立变数由 $x$ 变成 $x'=Tx$ 时, 如設

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\partial_{ij}^2 u=\sum_{i,j=1}^{m,m} a'_{ij}\partial_{ij}'^2 u,$$

由于

$$(a'_{ij})=T(a_{ij})T^* \quad (T^* \text{ 是 } T \text{ 的轉置矩陣}),$$

所以令 $y'=Ty$ 后, 就有

$$(x'-y')^*(A'_{ij})(x'-y') = (T(x-y))^*(a'_{ij})^{-1}T(x-y)$$
$$= (x-y)^*(a_{ij})^{-1}(x-y) = (x-y)^*(A_{ij})(x-y).$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A'_{ij}(x'_i-y'_i)(x'_j-y'_j) = \sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j).$$

故 $r$ 对于变换 $T$ 是不变的，即 $r(x, y) = r(x', y')$。現在特别取 $T$ 为这样的矩陣，它使得

$$(a'_{ij}) = T(a_{ij})T^* = (\delta_{ij}),$$

由于 $1 = \det(\delta_{ij}) = \det(T)^2 \det(a_{ij})$，所以

$$\det(T) = 1/\sqrt{|a|}.$$

因此，如果 $W(x, y)$，$\varphi(y)$ 是任意的函数，則經过变换 $x' = Tx$，$y' = Ty$ 后，下列的关系式应該成立

$$\int_{B'} W(x', y')\varphi(y')d^m y'$$
$$= \int_B W(x, y)\varphi(y)\frac{1}{\sqrt{|a|}}d^m y. \tag{33.18}$$

再因 $L_x[u] = \Delta_{x'}u$，所以由(33.18)及(32.6)，就能說明(33.17)是方程(33.15)的基本解。

**注意 1** 关于(33.2)中的 $V(x, y)$，我們至少需要下列假設条件，即当 $x, y \in \overline{B}$，而 $x \neq y$ 时，它是 $(x, y)$ 的連續函数，并且滿足条件

$$\int_B |V(x, y)|dy < \infty, \qquad \int_B |V(x, y)|dx < \infty,$$
$$\int_B\int_B |V(x, y)|dxdy < \infty.$$

如果对函数 $V(x, y)$，(i)及(33.9)成立，那么上面的条件必然会成立。

**注意 2** 如把 $V(x, y)$ 看成是关于变数 $x$ 的广义函数 $V_{(x)}$，那么对关于 $B$ 的任意試驗函数 $w$，就有关系式

$$L_x V_{(x)}(w) = V_{(x)}(L^* w).$$

用广义函数論中的表示方法，(33.5)可以写成下面的形状

$$L_x V_{(x)} = \delta_{(y)} \quad (\text{Dirac 算子}).$$

这个方程就是按广义函数論所作的基本解的定义。

**习題**　証明如(i)及(iv)成立，則 $V(x, y)$ 作为 $L[u]=0$ 的基本解(根据最初的定义)的必要条件是(ii)及(iii)成立。

**2. 拟基本解(parametrix)**　关于形状如(33.1)但是系数不是常数的 $L[u]$，Hilbert 和 E. Levi 采取了下面的方法以代替直接求 $L[u]=0$ 的基本解．

首先仍如(33.16)那样地定义 $A_{ij}$ 及 $a$，幷令

$$\left.\begin{aligned} r(x, y) &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}, \\ H(x, y) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{|a(y)|}} \log\{1/r(x, y)\} & (m=2), \\ \dfrac{1}{(m-2)\omega_m\sqrt{a(y)}} r(x, y)^{2-m} & (m\geq 3). \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{33.19}$$

对于任意連續可微函数 $\varphi(y)$，如果使用上面的 $H(x, y)$，作出如下的 $u(x)$：

$$u(x) = -\int_B H(x, y)\varphi(y)d^m y, \tag{33.20}$$

那么可以証明(Levi 1909 年)

$$\left.\begin{aligned} L[u] &= \varphi(x) + \int_B K(x, y)\varphi(y)d^m y, \\ K(x, y) &= L_x[H(x, y)]. \end{aligned}\right\} \tag{33.21}$$

这里

Hilbert 称这样的函数 $H(x, y)$ 为 **parametrix**，而 Gevrey 称它为拟基本(quasi-elementary)解。因此微分方程(33.3)的求解归結为解以 $\varphi$ 为未知函数的 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x) + \int_B K(x, y)\varphi(y)d^m y = f(x). \tag{33.22}$$

現在如果对 $K(x, y)$ 存在着預解核 $\chi(x, y)$，即如果成立

$$\left.\begin{aligned} \int_B K(x, s)\chi(s, y)d^m s &= \int_B \chi(x, s)K(s, y)d^m s, \\ \chi(x, y) + K(x, y) + \int_B K(x, s)\chi(s, y)d^m s &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{33.23}$$

那么根据下式

$$\varphi(x) = f(x) + \int_B \chi(x, y) f(y) d^m y \tag{33.24}$$

就能得到(33.22)的解 $\varphi$ 的表达式。

再把(33.24)代入(33.20),就得到(33.3)的解 $u$

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= -\int_B V(x, y) f(y) d^m y, \\ \text{这里}\quad V(x, y) &= H(x, y) + \int_B H(x, s) \chi(s, y) d^m s. \end{aligned}\right\} \tag{33.25}$$

因此,如果求到了满足(33.23)的 $\chi(x, y)$,那么(33.25)中的 $V(x, y)$ 就是 $L[u]=0$ 的基本解。当 $B$ 相当小时,满足(33.23)的预解核 $\chi$ 可以用 Neumann 級数来表示,即

$$\chi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K^{(n)}(x, y), \tag{33.26}$$

这里

$$K^{(1)}(x, y) = K(x, y),$$

$$K^{(n+1)}(x, y) = \int_B K^{(n)}(x, s) K(s, y) d^m s.$$

**注意 3** 如 $a_{ij}(x)$ 一次連續可微,那么当 $x \neq y$ 时,$H(x,y)$ 以及它对 $x$ 的任意次导数都是 $x, y$ 的連續可微函数,此外还有

$$H(x, y) = O(|x-y|^{2-m}), \quad \partial_x H, \partial_y H = O(|x-y|^{1-m}),$$

$$\partial_{ij}^2 H = O(|x-y|^{-m}).$$

其次,对形状如 (31.12) 的 $L[u]$,如它的系数函数都一次連續可微,则 $K(x, y) = L_x[H]$ 对 $x \neq y$,也是 $x, y$ 的連續可微函数,并有

$$K(x, y) = O(|x-y|^{1-m}), \quad \partial_x K, \partial_y K = O(|x-y|^{-m}).$$

以此为根据还能証明函数 $\chi(x, y)$(假設存在的話)具有与 $K$ 同样的性質。

由此就能証明 $V(x, y)$, $\partial_x V$ 在 $x \neq y$ 时也連續可微,并满足关系式

$$V(x, y) = O(|x-y|^{2-m}), \quad \partial_x V, \partial_y V = O(|x-y|^{1-m}).$$

特别在証明(33.21)式时,下面的关系

$$\partial_{ij}^2 H + \partial_i \partial_j' H = O(|x-y|^{1-m}) \quad (\partial_j' \text{ 表示对 } y_j \text{ 的微分})$$

是非常重要的。[(33.2) 中的 $u(x)$ 才成为二次連續可微。]

要詳細地証明上列事实，需要很多篇幅，本书不能满足这种要求，只能把一些必要的定理列举如下。(讀者可参看 Miranda: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico 第2章。)

**定理 33.1** 設 $K(x, y)$ 当 $x, y \in \overline{B}$，而 $x \neq y$ 时連續，并且满足条件

$$|K(x, y)| \leqslant c|x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha>0),$$

如果 $\varphi(y)$ 在 $B$ 上为有界可測函数，那么

$$u(x) = \int_B K(x, y)\varphi(y)d^m y \tag{33.27}$$

在 $\overline{B}$ 上連續。

**定理 33.2** 設 $K(x, y)$，$\partial_x K(x, y)$ 当 $x, y \in \overline{B}$，而 $x \neq y$ 时連續，并且满足条件

$$|\partial_x K(x, y)| \leqslant c|x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha>0),$$

如果 $\varphi(y)$ 是 $B$ 上有界可測函数，那么 (33.27) 在 $\overline{B}$ 上就連續可微，并且有

$$\partial_i u(x) = \int_B \partial_i K(x, y)\varphi(y)d^m y.$$

**定理 33.3** 設 $K(x, y)$ 当 $x, y \in \overline{B}$，而 $x \neq y$ 时是 $(x, y)$ 的連續可微函数，并且

$$|K(x, y)| \leqslant c|x-y|^{\alpha-m} \quad (\alpha>0),$$

$$|\partial_i K(x, y) + \partial_i' K(x, y)| \leqslant c'|x-y|^{\alpha'-m} \quad (\alpha'>0).$$

如果 $\varphi(y)$ 在 $\overline{B}$ 上連續可微，那么(33.27)也在 $\overline{B}$ 上連續可微，并且

$$\partial_i u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{B_\varepsilon} \partial_i K(x, y)\varphi(y)d^m y + \int_{S_\varepsilon(x)} K(x, y)\varphi(y)n_i dS(y)\right\},$$

这里 $S_\varepsilon(x)$ 是以 $x$ 为中心，$\varepsilon$ 为半徑的球面，$B_\varepsilon$ 是在 $B$ 中除去 $S_\varepsilon(x)$ 內部所余的区域。$(n_1, \cdots, n_m)$ 是外向的单位法綫。

**定理 33.4** 設 $K_1(x, y)$，$K_2(x, y)$ 当 $x, y \in \overline{B}$，而 $x \neq y$ 时連續，并有

$$|K_1(x, y)| \leqslant c_1|x-y|^{\alpha-m}, \quad |K_2(x, y)| \leqslant c_2|x-y|^{\beta-m} \quad (\alpha, \beta>0),$$

则

$$K_3(x, y) = \int_B K_1(x, s)K_2(s, y)d^m s$$

当 $x, y \in \overline{B}$，$x \neq y$ 时也連續。此外

(i) 当 $\alpha+\beta<m$ 时，$|K_3(x, y)| \leqslant c_3|x-y|^{\alpha+\beta-m}$，

(ii) 当 $\alpha+\beta=m$ 时，$|K_3(x, y)|\leqslant c_3\log(k/|x-y|)$，

(iii) 当 $\alpha+\beta>m$ 时，$K_3(x, y)$ 对 $x, y\in\overline{B}$ 連續。

**定理 33.5** 設 $K(x, y)$ 当 $x, y\in\overline{B}$，而 $x\neq y$ 时是 $(x, y)$ 的連續可微函数。并且

$$|\partial_x K|\leqslant c_1|x-y|^{-m},\quad |\partial_y K|\leqslant c_1|x-y|^{-m},$$

$$|\partial_i K(x, y)+\partial_i' K(x, y)|\leqslant c'|x-y|^{1-m}.$$

此外，如果 $H(x, y)$，$\partial_x H(x, y)$ 对 $x, y\in\overline{B}$，$x\neq y$ 連續，而

$$|\partial_x H(x, y)|\leqslant c_2|x-y|^{\alpha-m}\qquad(\alpha>0),$$

并且令

$$J(x, y)=\int_B K(x, s)H(s, y)d^m s,$$

则 $J$，$\partial_x J$ 对 $x, y\in\overline{B}$，$x\neq y$ 連續，并且对 $B$ 内任一有界集合 $B_0$，有

$$|\partial_x J(x, y)|\leqslant C(B_0)|x-y|^{\alpha-m}.$$

## § 34 二阶椭圆型方程的 Green 函数

**1. Dirichlet 問題的 Green 函数** 設 $V_0(x, y)$ 是 $L[u]=0$ 的一个基本解，那么容易理解，对这个基本解加上一个 $L[u]=0$ 的正则解 $u=w(x, y)$（$y$ 是参数）之后，就有

$$V(x, y)=V_0(x, y)+w(x, y),$$

$V(x, y)$ 仍是 $L[u]=0$ 的基本解。

如果伴随方程 $L_x^*[v]=0$ 的基本解 $V(x, y)$ 在 $B$ 的边界 $x\in\Gamma$ 上滿足条件 $V(x, y)=0$，它就叫做 $L_x[u]=0$ 关于区域 $B$ 的 **Green 函数**。現在設 $u$ 是(33.3)的解。如在 Green 公式(26.10)内令 $v=V(x, y)$，由于

$$\int_{B_\varepsilon}\{VL[u]-uL^*[V]\}d^n x$$

$$=\left(\int_\Gamma-\int_{S_\varepsilon(y)}\right)\{V(\partial_\lambda u+\beta_n u)-u\partial_\lambda V\}dS(x)$$

（这里的 $B_\varepsilon$，$S_\varepsilon(y)$ 与前节的意义相同）。所以得到下面的公式

$$\int_{B_\varepsilon} V\cdot f d^n x = -\int_\Gamma \partial_N V\cdot u dS(x) + \int_{S_\varepsilon(y)} \partial_N V\cdot u dS(x).$$

于是当 $\varepsilon\to 0$ 时，这个公式的极限式（根据 (iii) 及 (iv)）写入了变数 $x$, $y$ 后就成为

$$u(x) = -\int_B V(y, x) f(y) d^n y - \int_\Gamma \partial_N V(y, x) u(y) dS(y). \quad (34.1)$$

因此，如果 (33.3) 的解存在，那么它就可用 (34.1) 来表示。这里我們如果以 $V(y, x)$ 作为 $y$ 的函数，則它就是 $L_y^*[v]=0$ 的基本解。此外，如果以 $V(y, x)$ 作为 $x$ 的函数，則它是 $L_x[u]=0$ 的基本解。这个断言的理由非常简单，因为如果 $L_x^*[v]=0$ 的 Green 函数为 $V^*(x,y)$（即它是 $L_x[u]=0$ 的基本解），于是应該有下列关系

$$V^*(x, y) = V(y, x). \quad (34.2)$$

特别是当 $L=L^*$（即 $L$ 是自伴的）时，則由对称性可知 $V(x, y) = V(y, x)$.

所以，当 Green 函数 $V(x, y)$ 存在，$f(x)$ 連續可微，并在 $\Gamma$ 上任意給定 $u(x)=g(x)$（連續）的时候，(34.1) 就給出了 Dirichlet 問題的解。

**(34.2) 的証明** 設在 $B$ 内任取二点 $y^1$ 与 $y^2$ ($y^1\neq y^2$)，以这两点为中心，$\varepsilon$ 为半徑分別作二个不相交的球面 $S_\varepsilon^1$, $S_\varepsilon^2$. 令在 $B$ 内除去 $S_\varepsilon^1$ 及 $S_\varepsilon^2$ 内部所余的区域为 $B_\varepsilon$. 置 $u=V^*(x, y^1)=V_1^*$, $v=V(x, y^2)=V_2$，使用 Green 公式 (26.10)，就有

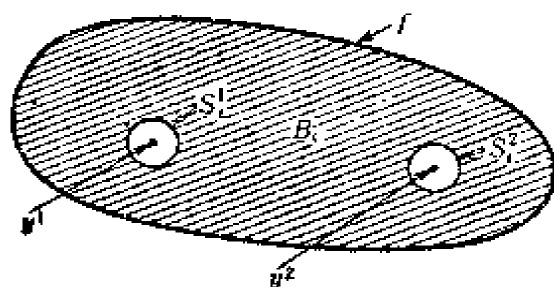


图 34.1

$$\int_{B_\varepsilon} \{V_2 L[V_1^*] - V_1^* L^*[V_2]\} d^n x = 0,$$

由于当 $x\in\Gamma$ 时，$V_1^*=V_2=0$，所以

$$\left(\int_{S_\varepsilon^1} + \int_{S_\varepsilon^2}\right)(V_2\partial_N V_1^* - V_1^*\partial_N V_2 + \beta_n V_2 V_1^*) dS(x) = 0. \quad (34.3)$$

再由于在 $x=y^1$ 的邻域，$-\partial_N V_2+\beta_n V_2$ 連續，并且

$$V_1^*=O(|x-y^1|^{2-n}),\quad \partial_N V_1^*=O(|x-y^1|^{1-n}),$$

因此当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\int_{S_\varepsilon^1}(-\partial_N V_2+\beta_n V_2)V_1^* dS(x)\to 0. \tag{34.4}$$

此外，对于 $V_1^*$，根据(iii)及(iv)有

$$\int_{S_\varepsilon^1} V_2\partial_N V_1^* dS(x)\to -V(y^1,y^2). \tag{34.5}$$

同样地有

$$\int_{S_\varepsilon^2}(\partial_N V_1^*+\beta_n V_1^*)V_2 dS(x)\to 0. \tag{34.6}$$

$$\int_{S_\varepsilon^2} V_1^*\partial_N V_2 dS(x)\to -V(y^2,y^1). \tag{34.7}$$

所以由(34.3)～(34.7)就得到

$$V(y^1,y^2)=V^*(y^2,y^1).$$

証毕

**2. Neumann 問題的 Green 函数** 設 $\alpha(x)$ 是定义在 $B$ 的边界 $\Gamma$ 上的一个函数，又在 $\Gamma$ 上給定函数 $g(x)$。現在求方程(33.3)的解 $u$，它在 $\Gamma$ 上要滿足条件

$$\partial_N u+\alpha\cdot u=g(x)\quad (x\in\Gamma). \tag{34.8}$$

这样的問題叫做**广义的 Neumann 問題**。这时，关于边界 $\Gamma$ 上的共軛微分算子 $D_N$ 及 $D_N^*$，可用下列的公式定义：

$$\left.\begin{aligned} D_N u=\partial_N u+\alpha u,\quad D_N^* u=\partial_N u-\alpha^* u,\\ \alpha+\alpha^*=\beta_n,\end{aligned}\right\} \tag{34.9}$$

这里

于是有

$$v\partial_N u-u\partial_N v+\beta_n uv=vD_N u-uD_N^* v,$$

从而可以把 Green 公式写成下面的形状

$$\int_B\{vL[u]-uL^*[v]\}d^n x=\int_\Gamma\{vD_N u-uD_N^* v\}dS(x). \tag{34.10}$$

这样我們就可以把关于 $L[u]=0$ 的广义 Neumann 問題的 Green

函数定义为 $L_x^*[v]=0$ 的基本解 $v$，对于 $v$ 要求当 $x\in\Gamma$ 时，$D_N^*v=0$。

如果 Green 函数存在的話，那么关于

$$L[u]=f(x),\quad D_Nu=g(x)\quad(x\in\Gamma)\tag{34.11}$$

的 Neumann 問題的解（假設解存在），就象 Dirichlet 問題的情形一样，可以由下列公式給出

$$u(x)=-\int_B V(y,x)f(y)d^ny+\int_\Gamma V(y,x)g(y)dS(y).\tag{34.12}$$

其次，关于 $V(x,y)$ 的共軛 Green 函数 $V^*(x,y)$，可以定义为方程 $L_x[u]=0$ 满足条件"$x\in\Gamma$ 时，$D_Nu=0$"的基本解。此外，和 Dirichlet 問題的情形一样，这里也成立公式

$$V^*(x,y)=V(y,x).\tag{34.13}$$

**注意** 对于 Dirichlet 問題的 Green 函数，我們只說明了边界是光滑的情形，对不光滑的边界也可以定义 Green 函数。不过，这时由于不能使用关于边界的导数，所以 (34.2) 的証明是非常困难的。对于特殊情形的 Laplace 方程，这种証法見井上正雄：势函数論 85 頁。

## §35 关于椭圆型方程的补充說明

有許多关于椭圆型方程的重要結果，限于本书的篇幅，不能作詳細說明，在此仅作簡单的介紹。

### 1. 关于 Dirichlet 問題解的存在性

(a) 綫性的情形。当区域 $B$ 相当的小，并且边界 $\Gamma$ 相当光滑时，就象势函数論中所作的那样，使用由基本解所形成的二重势函数（关于 $\Gamma$ 面的），就能把 Dirichlet 問題归結为关于 $\Gamma$ 上面积分的 Fredholm 积分方程。因此，对于相当小的球 Dirichlet 問題是可解的。

如区域 $B$ 相当小，并且存在着如 (31.13) 的函数 $\omega(x)$，那么就可以使用調和函数中关于优（劣）調和函数的方法，只要规定边界 $\Gamma$ 满足适当的条件，譬如 Poincaré 条件（即对 $\Gamma$ 的各点存在着以

这点为頂点，并在頂点的近傍落在 $B$ 外的錐体)，那么对 $\Gamma$ 上已給的連續任意边界值，Dirichlet 問題就存在着唯一的解，而且这个解連續依賴于已給的边界值(卽边界条件的适切性)。Oleynik 曾指出，对于边界 $\Gamma$ 只要規定了与調和函数情形相同的条件就能保証 Dirichlet 問題解的存在。見 Matemat. Sbornik, 24 (1949), p. 1～14.

(b) 半綫性的情形。假設 $L[u]\equiv\sum a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u=f(x, u, \partial_x u)$，其中 $a_{ij}(x)$，$f(x, u, p)$一次連續可微(也可以換成較弱的适当条件)。并設存在着函数 $\underline{\omega}(x)$ 及 $\overline{\omega}(x)$，使得对于 $\underline{\omega}(x)\leqslant u\leqslant\overline{\omega}(x)$，

$$|f(x, u, p)|\leqslant A+B|p|^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant 2),$$

如 $\alpha<2$，則这里的 $B$ 是任意的常数，如 $\alpha=2$，則 $B$ 是相当小的数，并在 $x\in B$ 时，

$$L[\underline{\omega}]>f(x, \underline{\omega}, \partial_x\underline{\omega}),$$
$$L[\overline{\omega}]<f(x, \overline{\omega}, \partial_x\overline{\omega}).$$

再設边界 $\Gamma$ 滿足 Poincaré 条件，且在 $\Gamma$ 上已給定的边界值 $g(x)$ (連續函数) 滿足 $\underline{\omega}(x)\leqslant g(x)\leqslant\overline{\omega}(x)$. 在这些假設条件下，就存在着 Dirichlet 問題的解 $u(x)$，并滿足 $\underline{\omega}(x)<u(x)<\overline{\omega}(x)$. (見 Nagumo: Osaka Math. Jour., 6 (1954), p. 207～229.)

但是上面所說的解不一定是唯一的。如果 $f$ 是关于 $u$ 的遞增函数，那就能証明解的唯一性。当 $\alpha=2$，而 $B$ 是任意常数时，解是否唯一还是个未解决的問題。当 $\alpha>2$ 时，存在着相反的例子；而当 $\alpha=1$ 时，是否能得到和上面 Oleynik 相同的結果，仍然是一个存在的問題。

(c) 拟綫性的情形。考慮 $m=2$，并且仅含主部的方程

$$\sum_{i,j=1}^{2,2} a_{ij}(x, u, \partial_x u)\partial^2_{ij}u=0$$

而 $B$ 是个凸集的情形。設由 $\Gamma$ 上的边界值 $u=g(x)$ 所画出的曲

綫具有这样的性质：即包含它上面任意三点的平面的梯度限定在一定范圍内，Schauder 曾經証明，这时的 Dirichlet 問題的解是存在的，見 Math. Zeit., 37(1933), p. 623～634。当 $B$ 不是凸集时，譬如对极小曲面的方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0,$$

如大家所熟知，就不一定存在着解（单值）。

对半綫性以及拟綫性方程 Dirichlet 解的存在性的証明，看来以綫性的情形为基础，使用函数空間的不动点原理的办法是适当的（見本丛书：常微分方程第3章）

对一般的拟綫性方程，当 $B$ 是相当小的球，并且边界值十分近似常数时，存在着 Dirichlet 問題的解。这个断言，可以用逐次逼近法或函数空間的不动点原理，或是区域不变定理（Schauder 定理）来証明。

**2. 解的正則性**　綫性方程 $L[u]=f(x)$ 的解，在存在区域的内部，具有与方程系数及 $f$ 相同程度的正則性。特别当方程的系数及 $f$ 解析正則时，那么解也是解析正則的，即成立着“一致定理”　这是 Hilbert 問題之一。一致定理对非綫性的椭圓型方程也能成立。对 $m=2$ 的情形最初由 S. Bernstein (1904年)，后来由 T. Radó 加以正确的証明了(1926年)。此外，对 $m=2$ 的情形，H. Lewy 利用双曲型方程，給出了一个非常有趣而巧妙的証法(1929年)(Courant-Hilbert II, p, 338)。至于最一般的椭圓型方程（包含高阶联立方程組）是由 Petrovski 証明的 (Mat. Sbornik 5(1939), p. 3～70)。

椭圓型方程的解的集合叫做正規族。当 Dirichlet 問題恒存在着唯一解时，Harnack 定理（即如正規族的函数序列在边界上一致收斂，則在区域的内部直到二阶导函数也一致收斂）成立。

关于非解析正則的二阶椭圓型方程，它的解也成立着一致定

理，这个事实是由 Aronszajn 及 Cordes 所証明的（見 Cordes: Nachr. Akad. Wiss. (Göttingen 1956) 和 Aronszajn: University of Kansas, Technical Report (1956)）.

**3. 高阶方程** 关于高阶綫性椭圓型方程的基本解以及解的正則性問題，这里推荐 F. John: General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations (Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems (1955))，这本书中的講法很容易理解，

此外，对一般高阶椭圓型方程，最近由 Friedrichs, Gårding, Lion, Lax, Nirenberg 等人創始，以广义解为基础开展了嶄新的研究体系。关于这方面的問題我們推荐讀者参看本从书吉田耕作著的泛函分析。

**4. 本征值問題** 二阶椭圓型方程（关于边值問題）的本征值問題可参看 Hilbert-Courant II, 第 7 章。

# 第7章 双曲型偏微分方程

## §36 正规双曲型方程

### 1. 正規方程 綫性方程

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}(x)\,\partial_{ij}^2 u+\sum_{i=1}^{m} b_i(x)\partial_i u+c(x)u=f(x) \qquad (36.1)$$

叫做双曲型方程，如果

$$|a_{ij}(x)\quad {}_{j=1,\cdots,m}^{i=1,\cdots,m}|\neq 0, \qquad (36.2)$$

并且二次型 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是变号的。现在把独立变数 $x$ 利用綫性变换

$$x'_\mu=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{\mu i}x_i, \quad |\alpha_{\mu i}\quad {}_{i=1,\cdots,m}^{\mu=1,\cdots,m}|\neq 0 \qquad (36.3)$$

变成 $x'$，并要求变换后系数在一点 $x^0$ 处具有特别簡单的形状。由于經过变换(36.3)后，有

$$L[u]=\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m} a'_{\mu\nu}\,\partial'^2_{\mu\nu}u+\sum_{\mu=1}^{m} b'_\mu\,\partial'_\mu u+cu,$$

这里

$$a'_{\mu\nu}=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\,\alpha_{\mu i}\,\alpha_{\nu j}, \qquad (36.4)$$

所以适当的选取变换(36.3)可以使得在一点 $x=x^0$ 处，矩陣 $(a'_{\mu\nu})$ 成为仅具有主对角綫的形状，卽

$$a'_{\mu\nu}(x^{0\prime})=\lambda_\mu\delta_{\mu\nu}.$$

如果(36.3)是正交变换，$\lambda_\mu$ 是矩陣 $(a_{ij})$ 的本征值，根据(36.2)有 $\lambda_\mu\neq 0$。此外，正的 $\lambda_\mu$ 以及負的 $\lambda_\mu$ 的个数与变換(36.3)无关。特别当其中一个 $\lambda_\mu$ 具有与其他的 $\lambda_\mu$ 不同的符号时，就称(36.1)在

$x=x^0$ 是**正規双曲的**。如果 $\lambda_\mu$ 有二个以上是正的或負的，那就称(36.1)在 $x=x^0$ 处是**超双曲的**。下面我們仅考虑(36.1)在某一个变域中是正規双曲的情形。如果对(36.1)适当的乘以±1，那么可以使得 $(a_{ij})$ 的本征值中仅有一个是正的，其他的都是負的。即 $(a_{ij})$ 属于

$$+,-,-,\cdots,-$$

型。这时，使得

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}p_ip_j>0 \tag{36.5}$$

的面素叫做**类空**(space-like)面素。对于由类空面素所形成的曲面 $\varphi(x)=0$，有

$$Q(\varphi,\varphi)=\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi>0.$$

这样的曲面叫做**类空曲面**，对类空面素 $p$ 所形成的横截向量 $\xi$，即

$$\xi_i=\lambda\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_j \quad (\lambda\neq 0) \tag{36.6}$$

叫做**类时**(time-like)**向量**。

如令矩陣 $(a_{ij})$ 的逆陣为

$$\left(A_{ij}\ {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m}\right)=\left(a_{ij}\ {}^{i\downarrow 1,\cdots,m}_{j\to 1,\cdots,m}\right)^{-1}, \tag{36.7}$$

则由(36.6)及(36.7)有

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij}\xi_i\xi_j=\lambda^2\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}p_ip_j, \tag{36.8}$$

因此 $\xi$ 为类时向量的充要条件是

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij}\xi_i\xi_j>0 \tag{36.9}$$

(从(36.6)可以求出 $p$ 关于 $\xi$ 的表达式)。

对于 $x$ 的变换(36.3)，面素 $p$ 的变换公式可以根据成帯条件

$$du=\sum_{i=1}^{m} p_i dx_i=\sum_{\mu=1}^{m} p'_\mu dx'_\mu$$

得到，即为

$$p_i=\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_{\mu i}\,p'_\mu. \tag{36.10}$$

因为向量 $\xi$ 与 $x$ 有着相同的变换公式，所以由(36.4)，(36.7)，就有

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m,m}A'_{\mu\nu}\,\xi'_\mu\xi'_\nu=\sum_{i,j=1}^{m,m}A_{ij}\,\xi_i\,\xi_j. \tag{36.11}$$

此外，由(36.4)及(36.10)可知，横截条件(36.6)关于变换(36.3)也是不变的。又 $\xi$ 与 $p$ 的内积也是不变的，即

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,p_i=\sum_{\mu=1}^{m}\xi'_\mu\,p'_\mu. \tag{36.12}$$

最后我們称满足条件

$$\sum_{i,j=1}^{m,m}A_{ij}\,\xi_i\,\xi_j<0 \tag{36.13}$$

的向量 $\xi$ 为**类空向量**。

**引理** 面素 $p$ 成为类空面素的条件(36.5)，等价于和 $p$ 正交，即满足

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_ip_i=0\qquad(\xi\neq0) \tag{36.14}$$

的一切向量 $\xi$ 成为类空向量的条件(36.13)。

**証** 因为經过适当的变换，可以使得在 $x=x^0$ 处

$$a_{11}=1,\quad a_{ii}=-1\ (i=2,\cdots,m),\quad a_{ij}=0\ (i\neq j),$$

这时 $A_{ij}(x^0)$ 的形状与 $a_{ij}(x^0)$ 的形状完全一样。于是只要証明，如果

$$p_1^2-\sum_{i=2}^{m}p_i^2>0, \tag{36.15}$$

那么对满足(36.14)的 $\xi$，必定有

$$\xi_1^2-\sum_{i=2}^{m}\xi_i^2<0 \tag{36.16}$$

就够了。因为当 $\xi_1=0$ 时，(36.16)显然成立，所以只要証明 $\xi_1\neq0$

的情形。由 (36.14)，有 $2\lambda p_1\xi_1+2\lambda\sum_{i=2}^{m}p_i\xi_i=0$，把这个式子与 (36.15) 相加，就有

$$(p_1+\lambda\xi_1)^2-\sum_{i=2}^{m}(p_i-\lambda\xi_i)^2>\lambda^2\left(\xi_1^2-\sum_{i=2}^{m}\xi_i^2\right). \quad (36.17)$$

由于 $\xi_1\neq0$，所以可取满足方程 $p_1+\lambda\xi_1=0$ 的 $\lambda$，这样，(36.17)的左边就 $\leq 0$。于是 (36.16) 成立。

相反，設对于满足 (36.14) 的 $\xi$ 成立着 (36.16)。若是 $p_1=0$，那么对 $\xi_1\neq0$，$\xi_2=\xi_3=\cdots=\xi_m=0$，(36.14)就应該成立。但是这个結果与 (36.16) 矛盾，因此必有 $p_1\neq0$。故由 (36.16) 及 (36.14) 就有

$$(\xi_1+p_1)^2-\sum_{i=2}^{m}(\xi_i-p_i)^2<p_1^2-\sum_{i=2}^{m}p_i^2. \quad (36.18)$$

这时，如果令 $\xi_i=p_i\quad(i=2,\cdots,m)$，$\xi_1=-(p_2^2+\cdots+p_m^2)/p_1$，那么 (36.14) 就应該成立，从而 (36.18) 的左边 $>0$。于是 (36.15) 成立。

証畢

**2. 正規双曲型方程的标准型** 設 $\varphi_1(x)=c$ 是类空曲面族，即对函数 $\varphi_1(x)$ 有

$$Q(\varphi_1,\ \varphi_1)>0. \quad (36.19)$$

根据 §23 所説的方法，选择 $m-1$ 个函数 $\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$，使得

$$\left.\begin{aligned}&Q(\varphi_1,\ \varphi_\nu)=0\quad(\nu=2,\cdots,m),\\&\frac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)}{D(x_1,\cdots,x_m)}\neq0.\end{aligned}\right\} \quad (36.20)$$

現在令

$$t=\varphi_1(x),\quad x'_\nu=\varphi_\nu(x)\quad(\nu=2,\cdots,m),$$

并且取 $(t,x'_2,\cdots,x'_m)$ 代替 $x$ 为独立变数，則 (36.1) 就变成

$$\partial_{tt}^2u+\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m}a'_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}'^2u+b'\partial_tu+\sum_{\mu=2}^{m}b'_\mu\partial'_\mu u+cu=f \quad (36.21)$$

的形状。这时对于 $(a'_{\mu\nu})$ 的二次型，成立着关系式

$$\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m} a'_{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu<0 \quad (\eta\neq 0). \tag{36.22}$$

为了証明上面的不等式，令

$$\psi(x)=\sum_{\mu=2}^{m}\eta_\mu\,\varphi_\mu(x),$$

由(36.20)有

$$Q(\varphi_1,\psi)=\sum_{\mu=2}^{m}\eta_\mu Q(\varphi_1,\varphi_\mu)=0. \tag{36.23}$$

又

$$\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m} a'_{\mu\nu}\,\eta_\mu\eta_\nu=\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m} Q(\varphi_\mu,\varphi_\nu)\eta_\mu\eta_\nu=Q(\psi,\psi), \tag{36.24}$$

幷設

$$\partial_i\varphi_1=p_i,\quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,\partial_j\psi=\xi_i \tag{36.25}$$

(注意$\xi\neq 0$)，于是根据(36.19)，(36.23)，(36.24)，(36.25) 就有

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\,p_i\,p_j=Q(\varphi_1,\varphi_1)>0,\quad \sum_{i=1}^{m}\xi_i\,p_i=Q(\varphi_1,\psi)=0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} A_{ij}\,\xi_i\,\xi_j=Q(\psi,\psi)=\sum_{\mu,\nu=2}^{m,m} a'_{\mu\nu}\,\eta_\mu\,\eta_\nu.$$

根据引理，就証明了(36.22)。

現在把 $x'_2,\cdots,x'_m$ 改写成为 $x_1,\cdots,x_n\,(n=m-1)$，再根据§23，置

$$u=\exp\left(-\frac{1}{2}\int b'dt\right)v,$$

这样，就可以得到下列标准型方程

$$\partial_{tt}^2 v-\sum_{i,j=1}^{n,n} a_{ij}(t,x)\partial_{ij}^2 v+\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_i v+c(t,x)v$$
$$=f(t,x) \tag{36.26}$$

($\partial_i$ 表示对 $x_i$ 的微分)。这里 $t$ 叫做类时变数，$x$ 叫做类空变数。

**注意**　如果在(36.25)中 $\xi=0$，那么由(36.2)一定有 $\partial_i\psi=0$，即

$$\sum_{\mu=2}^{m}\partial_i\varphi_\mu\eta_\mu=0 \quad (i=1,\cdots,m).$$

根据上式及(36.20)就有 $\eta_\mu=0$，故如 $\eta\neq0$，那么必有 $\xi\neq0$。

## §37 Cauchy 問題解的决定区域

**1. 射綫錐** 对于正規双曲型方程(标准型)

$$L[u]=\partial_{tt}^2u-\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\partial_{ij}^2u+\sum_{i=1}^{m}b_i\partial_iu+cu=f, \qquad (37.1)$$

設 $a_{ij}, b_i, c, f$ 都是 $(x,t)$ 的函数，并且有 $\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}\xi_i\xi_j>0 \quad (\xi\neq0)$。

为了方便起見把 $t$ 写成 $x_{m+1}$，則(37.1)的特征方程，如以 $s$ 为參数，就可以写成下面的样子：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{ds}x_i=-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x)p_j, && \frac{d}{ds}x_{m+1}=p_{m+1},\\&\frac{d}{ds}p_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m,m}\partial_i a_{jk}(x)p_jp_k, && \frac{d}{ds}p_{m+1}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (37.2)$$

如令 $a_{ij}(x^0)=a_{ij}^0$，那么通过一点 $x=x^0$ 的特征射綫就是方程組(37.2)滿足条件

$$s=0\text{ 时},\quad x=x^0,\quad p_i=\pi_i,\quad p_{m+1}=\varepsilon\Big(\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}^0\pi_i\pi_j\Big)^{1/2} \qquad (37.3)$$
$$(\varepsilon=\pm1)$$

的解

$$x_i=X_i(s,\pi),\quad p_i=P_i(s,\pi) \qquad (37.4)$$

的支持曲綫 $x=X(s)$。

如在(37.2)中設 $s=ks'$ ($k$ 常数)，再在变换后的(37.2)式中，把 $s'$ 还原成 $s$，那么可以看出，所得到的公式就是把 $p$ 写成 $kp$ 的式子。所以有 $X_i(ks',\pi)=X_i(s',k\pi)$。因此 $X_i(s,\pi)$ 必是 $s\pi=(s\pi_1,\cdots,s\pi_m)$ 的函数，卽

$$X_i(s,\pi)=\psi_i(s\pi_1,\cdots,s\pi_m). \qquad (37.5)$$

由于 $x_i=X_i$ 应該是(37.2)的解，所以从(37.5)得到

$$\partial_s X_i=-\sum_{j=1}^{m}\{a_{ij}(x)p_j\}_{(x,p)=(X,P)}=\sum_{j=1}^{m}\{\partial_j\psi_i(\xi)\pi_j\}_{\xi=s\pi}.$$

于是当 $s=0$ 时，有

$$-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^0\pi_j=\sum_{j=1}^{m}\partial_j\psi_i(0)\pi_j,\ \text{即}\ \partial_j\psi_i(0)=-a_{ij}^0.$$

因此由(36.2)，就有

$$|\partial_j\psi_i(0)|_{j=1,\cdots,m}^{i=1,\cdots,m}\neq 0.$$

于是，在 $x=x^0$(即 $\xi=0$)的邻域中，可以从方程組

$$x_i=\psi_i(\xi)\quad (i=1,\cdots,m)\tag{37.6}$$

把 $\xi$ 解出作为独立变数 $x$ 的函数

$$\xi_i=\varphi_i(x)\quad (i=1,\cdots,m).\tag{37.7}$$

对于 $t=x_{m+1}$，由于(37.2)及(37.3)有

$$t-t_0=\varepsilon s\Big(\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}^0\pi_i\pi_j\Big)^{1/2}.\tag{37.8}$$

又对于 $x_i=X_i$，根据(37.5)及(37.6)有 $\xi_i=s\pi_i$。所以由(37.7)及(37.8)(設 $s\neq 0$)得到

$$t=t^0-\varepsilon\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}^0\varphi_i(x)\varphi_j(x)}\quad (\varepsilon=\pm 1).\tag{37.9}$$

这就是說，通过 $(t^0, x^0)$ 的特征射綫，在 $x=x^0$ 邻域的 $(t, x)$ 空間内，构成了曲面(37.9)。由于在 $\varphi_i(x^0)=0$，$x=x^0$ 的邻域中，当 $x\neq x^0$ 时，$(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)\neq(0,\cdots,0)$，所以(37.9)形成了以 $(t^0, x^0)$ 为頂点的錐状曲面。这曲面叫做以 $(t^0, x^0)$ 为頂点的**射綫錐**(ray conoid)，它是(37.1)的特征曲面(見注意)。当 $\varepsilon=1$ 时，它叫**前进錐**，$\varepsilon=-1$ 时叫**后退錐**。

**注意1**　在(37.9)中，对应于 $s=1$ 或 $-1$ 的 $\varphi_i(x)$ 一般是相异的函数。至于(37.9)是(37.1)的特征曲面的理由，可以作如下的解釋：令

$$t=t^0+p_{m+1}s,\quad w=x_{m+1},\quad q_i=-p_i/p_{m+1}\quad (i=1,\cdots,m),$$

則 $w=t$，由(37.2)就知道，应該成立下面的公式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x, w)q_j, \quad \frac{d}{dt}w=1,\\&\frac{d}{dt}q_i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m,m}\partial_i a_{jk}(x, w)q_jq_k \quad (i=1, \cdots, m).\end{aligned}\right\} \tag{37.10}$$

此外，由(37.2)及(37.3)不难导出下面的方程❶

$$\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}(x, w)p_ip_j=p_{m+1}^2,$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{m,m}a_{ij}(x, w)q_iq_j-1=0. \tag{37.11}$$

因此方程組 (37.10) 的解 $\{x, w, q\}(t)$ 就是偏微分方程 (37.11) (这里 $q_i=\partial_i w$) 的特征帶。又因为当 $t=t^0$ 时，$\{x, w, q\}$ 的支体蜕化成为一点 $(x^0, t^0)$，所以当 $t=t^0$ 时，$\{x, w, q\}$ 作成一个 $m-1$ 維的面素組 (当 $t=t^0$ 时，$q_i=-\epsilon\pi_i(\sum a_{ij}^0\pi_i\pi_j)^{-1/2}$，所以本质上只有 $m-1$ 个参数)。并且特征帶 $\{x, w, q\}(t, \pi)$ 的全体組成 $m$ 維的面素組。由于它的支体(以 $x$ 代替 $t$, $\pi$ 为独立变数) 恰好就是 $m$ 維曲面 (37.9) $(w=t)$，所以它是 (37.1) 特征面的偏微分方程(37.11)的解(参照 § 24)。因此 (37.9) 是 (37.1) 的特征面。

**2. 解的唯一性(决定区域)** 設在 $m+1$ 維空間 $(t, x)$ 中，以 $(t^0, x^0)$ 为頂点的后退錐的方程是

$$K: t^0-t=\chi(x)\left(=\sqrt{\sum a_{ij}^0\varphi_i(x)\varphi_j(x)}\right). \tag{37.12}$$

当 $t^0(>0)$ 适当小时，超平面 $t=0$ 对 $K$ 所作的截口是 $m-1$ 維光滑

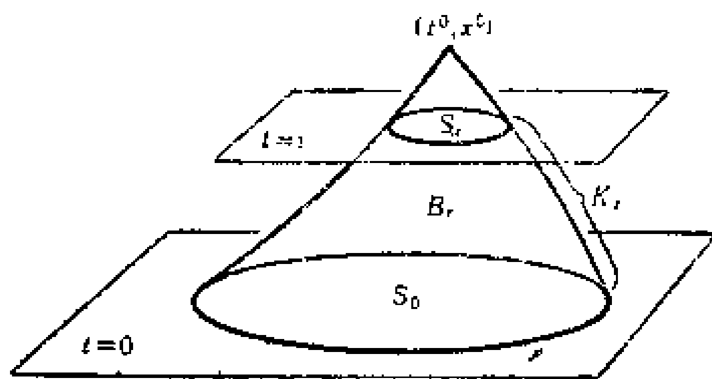



图 37.1

❶ 这里原书写法上有些混乱。在 (37.2) 以后，$x$ 应理解为 $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1})$，但在 (37.10) 中 $x_{m+1}=t=w$ 而 $x=(x_1, \cdots, x_m)$，因此在下面方程中原书的 $a_{ij}(x)$ 应当写成 $(x, w)$ 的函数。——校者注

的封閉曲面（$m=2$ 时，为封閉曲綫，見图 37.1）。以 $S_0$ 表示在超平面 $t=0$ 上落在 $K$ 内部的部分，并以 $B$ 表示 $S_0$ 与 $K$ 所包圍的 $m+1$ 維区域 $[t>0,\ t^0-t>\chi(x)]$。設 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是在 $S_0$ 上已給的函数。于是成立下列定理：

**定理 37.1** 方程(37.1)滿足初始条件"在 $S_0$ 上 $u=\varphi(x)$，$u_t=\psi(x)$"的解 $u(t,x)$，在 $B$ 内可唯一地决定。換言之，即 $B$ 是 $S_0$ 的决定区域。

**証** 考慮两个这样的解的差，就知道只要証明，滿足"$f(t,x)=0$，$\varphi(x)=\psi(x)=0$"的解 $u$，必在整个 $B$ 内恒等于 0 即可。設任取 $0<\tau<t^0$ 中的一个 $\tau$，以 $S_\tau$ 表示超平面 $t=\tau$ 上属于 $K$ 内的部分 [即 $t=\tau$，$t^0-\tau>\chi(x)$]。再設 $B_\tau$ 是 $K$，$S_0$，$S_\tau$ 所圍成的区域 [即 $0<t<\tau$，$t^0-t>\chi(x)$]，$K$ 中对应于 $0<t<\tau$ 的部分为 $K_\tau$。再对任意的函数 $u$，$v$ 令

$$\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\partial_i u\partial_j v=Q(u,v),$$

那么容易証明下列等式成立：

$$2u_t L[u]=\partial_t\{u_t^2+Q(u,u)\}-\sum_{i=1}^{m}\partial_i\left\{2u_t\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\partial_j u\right\}+R[u],$$

这里

$$R[u]=2u_t\sum_{i=1}^{m}\beta_i\partial_i u+\sum_{i,j=1}^{m,m}\alpha_{ij}\partial_i u\partial_j u+2cuu_t$$

$$\left(\alpha_{ij}=\partial_t a_{ij},\ \beta_i=b_i+\sum_{j=1}^{m}\partial_j a_{ij}\right). \tag{37.13}$$

其次，設 $n$ 是 $K$ 指向外部的单位法綫，因为它对 $t$ 軸与各 $x_i$ 軸的方向余弦分别是

$$(t,n)=1/\sqrt{1+\sum\partial_i\chi^2},\quad (x_i,n)=\partial_i\chi/\sqrt{1+\sum\partial_i\chi^2},$$

所以对 $B_\tau$ 应用散度定理，就得到

$$0=\int_{B_\tau} 2u_t\, L[u]d^{m+1}(t, x)=\left(\int_{S_\tau}-\int_{S_0}\right)\{u_t^2+Q(u, u)\}d^m x$$
$$+\int_{K_\tau}\{u_t^2+Q(u, u)-2u_t Q(u, \chi)\}(t, n)\, dS$$
$$+\int_{B_\tau} R[u]d^{m+1}(t, x). \qquad (37.14)$$

特别对于特征面(37.12),由于

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{m,m} a_{ij}\,\partial_i\chi\partial_j\chi\right\}_{t=\chi}=Q(\chi, \chi)_{t=\chi}=1;$$

所以当$(t, x)\in K_\tau$时,有

$$u_t^2+Q(u, u)-2u_tQ(u, \chi)=Q(u-c\chi, u-c\chi)_{c=u_t}\geqslant 0, \quad (37.15)$$

于是令

$$\int_{S_t}\{u_t^2+Q(u, u)\}d^m x=E(t)$$ (叫做关于 $S_t$ 的**能量积分**),

则由(37.14)及(37.15),就有

$$E(\tau)\leqslant E(0)+\int_{B_\tau} R[u]d^{m+1}(t, x). \qquad (37.16)$$

此外,可以容易地得到正数 $k_1$ 与 $k_2$,使得

$$R[u]\leqslant k_1\{u_t^2+Q(u, u)\}+k_2u^2. \qquad (37.17)$$

如再設 $\int_{S_t} u^2 d^m x=U(t)$,则因 $u(t)=u(0)+\int_0^t u_t dt$ (当 $u$ 是 $t$ 的函数时),所以当 $0\leqslant t\leqslant t^0$ 时,有

$$U(t)\leqslant 2U(0)+2t^0E(t)\,❶. \qquad (37.18)$$

于是根据 $E(t)$ 与 $U(t)$ 的定义及(37.17),(37.18)就有

$$\int_{S_t} R[u]d^m x\leqslant kE(t)+k'U(0) \quad (k, k' \text{ 正的常数}),$$

---

❶ 由于 $u(t)^2\leqslant 2u(0)^2+2t^0\int_0^t u_t^2\, dt$,并且当 $t$ 增加时,$S_t$ 在 $t=0$ 上的正射影将逐渐縮小❷。

❷ 因此双方对区域 $S_t$ 积分,就得到

$$U(t)\leqslant 2\int_{S_t} u^2(x, 0)d^m x+2t^0E(t)\leqslant 2\int_{S_0} u^2(x, 0)d^m x+2t^0E(t),$$

亦即(37.18)。——校者注

因此，适当选取正数 $k_0$ 后，由 (37.16) 就有

$$E(\tau)\leqslant E(0)+k_0U(0)+k\int_0^\tau E(t)dt❶. \tag{37.19}$$

这里如再設

$$\gamma=E(0)+k_0U(0),\quad \mu=\max_{0\leqslant t\leqslant t^0} e^{-2kt}E(t), \tag{37.20}$$

則由 (37.19) 又得到

$$E(\tau)\leqslant \gamma+k\int_0^\tau \mu e^{2kt}dt\leqslant \gamma+\frac{1}{2}\mu e^{2k\tau}.$$

但是根据 (37.20)，有 $\mu\leqslant\gamma+\mu/2$，即 $\mu\leqslant 2\gamma$，所以有

$$0\leqslant E(\tau)\leqslant 2(E(0)+k_0U(0))e^{2k\tau}. \tag{37.21}$$

如果 $E(0)=U(0)=0$ 成立，那就有 $E(\tau)=0$。由于 $\tau$ 是 $0\leqslant\tau\leqslant t^0$ 中的任意数，所以在整个 $B$ 内 $u_t=0$，即 $u=0$。　　証毕

**注意 2**　如果 $u$, $u_x$, $u_t$ 在 $S_0$ 一致地相当小，那么根据 (37.21)，在整个 $B$ 内能量积分 $E(t)$ 也相当的小。但从此我們并不能断定 $u_x$, $u_t$ 在整个 $B$ 内都一致地相当小。特别当 $m=1$ 时，根据第 4 章中的討論，我們知道，如果 $u$, $u_x$, $u_t$ 在 $S_0$ 一致地相当小，那么在整个 $B$ 内 $u$, $u_x$, $u_t$ 都将一致地相当小。但是当 $m\geqslant 2$ 时，这个事实不成立。特别对于 $m=3$ 的波动方程

$$\partial_t^2 u-\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}^2 u=0,$$

可設 $r=\sqrt{\sum x_i^2}$，計算一下形状如

$$u=r^{-1}F(r+t)$$

的解，就可了解上面的断言。这里 $F(s)$ 是二次連續可微函数。譬如設 $\tau>0$ 而

$$F(s)=\begin{cases}0 & (s<\tau),\\ \varepsilon(s-\tau)^{\alpha} & (s\geqslant\tau),\end{cases}\qquad (1<\alpha<2)$$

---

❶ 这里可利用下列引理：設 $I(\tau)$ 是定义在 $0\leqslant\tau\leqslant t^0$ 上的一个非負連續可微函数而且满足 $\frac{dI}{d\tau}\leqslant cI(\tau)+d$（$c$, $d$ 是常数），則成立不等式

$$I(\tau)\leqslant\frac{d}{c}(e^{c\tau}-1)\quad 和\quad \frac{dI}{d\tau}\leqslant de^{c\tau}.$$

以 $I(\tau)=\int_0^\tau E(t)dt$, $c=\gamma$, $d=k$ 就得到比 (37.21) 更好的估計式。引理証明不难，以 $e^{-c\tau}$ 乘双方，移項再积分之，就可以得到估計式。——校者注

如果 $\varepsilon$ 相当小，則当 $t=0$ 时，$u$, $u_x$, $u_t$ (在有界范圍內) 一致地相当小，但是对 $(t, x)=(\tau, 0)$，$u_t$, $u_x$ 将无穷大。$F(s)$ 一次連續可微，但它的二阶导数在 $s=\tau$ 处成为无穷大。只要把这样的解略加变形，就能得到解 $u$，它本身二次連續可微，并且当 $t=0$ 时，$u$, $u_x$, $u_t$ 为任意小，但是在 $(t, x)=(\tau, 0)$ 处 $u_t$ 的值将成为无穷大。

根据上面的事实就可以了解，为什么当 $m\geq 3$ 时，对于双曲型方程的 Cauchy 問題，微分不等式(比較定理)不是适当的工具，而用能量积分所表示的不等式，在这里却起着重要的作用。

## § 38 波动方程的解法

**1. Fourier 变换** 要解一般常系数偏微分方程，Fourier 变换是最有效的工具。为了容易理解它的理論，我們設独立变数 $x$ 的变域是整个 $m$ 維空間，而定义在空間内的复数值函数 $f(x)$ ($x$ 代表 $m$ 个实变数) 无限次連續可微。如以 $D^k f(x)$ 表示它的任意 $k$ 阶偏导数，則假設对于任意的自然数 $n$, $k$ 成立下列条件

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^n \cdot |D^k f(x)|=0, \quad \left(|x|=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^2}\right), \qquad (38.1)$$

这就是說：$f(x)$ 当 $|x|\to\infty$ 时急速地减少。我們把滿足这个条件的函数的全体記作 $(\mathscr{S})$。当积分变数的变域是整个的 $m$ 維空間时，我們在积分号下常略去代表积分区域的記号。现在考虑属于 $(\mathscr{S})$ 的函数 $f(x)$ 的下列积分

$$g(y)=(2\pi)^{-m/2}\int f(x)e^{-ix\cdot y}d^m x \qquad (i^2=-1) \qquad (38.2)$$

$\left(x\cdot y=\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu y_\nu\right)$，如果 $f$ 属于 $(\mathscr{S})$，那么 $g$ 也属于 $(\mathscr{S})$，并且关于 $y$ 的微分可以在积分号下施行，于是有

$$\partial_\nu g(y)=(2\pi)^{-m/2}\int (-ix_\nu)f(x)e^{-ix\cdot y}d^m x. \qquad (38.3)$$

我們可以把(38.2)看成是把 $(\mathscr{S})$ 中的函数 $f$ 变成 $(\mathscr{S})$ 中的

数 $g$ 的变换，它叫做 **Fourier 变换**。根据 (38.2)，反过来也能把 $f$ 表示为 $g$ 的积分（**逆 Fourier 变换**），它的形状为

$$f(x)=(2\pi)^{-m/2}\int g(y)e^{ix\cdot y}d^m y. \tag{38.4}$$

因为逆变换公式，仅仅是在 Fourier 变换(38.2)中以 $e^{ix\cdot y}$ 代替了 $e^{-ix\cdot y}$ 而得到的結果，所以它具有与 Fourier 变换相同的性質．这样，Fourier 变换就形成了 $(\mathscr{S})$ 到自身的一一对应。此外，对于 Fourier 变换，$(L^2)$ 的范数是不变量，即

$$\int |f(x)|^2 d^m x=\int |g(y)|^2 d^m y. \tag{38.5}$$

**注意 1**　允許实行 Fourier 变换的函数不必限定是属于 $(\mathscr{S})$ 的，只要是 $(L^1)$ 的函数就够了。我們限制它为属于 $(\mathscr{S})$ 的函数，是由于这样才能自由地进行任意次的微分运算。另外根据 (38.5) 可知，如对属于 $(L^2)$ 的函数实行 Fourier 变换（适当地解釋积分的意义），那么結果也是 $(L^2)$ 函数，所以 Fourier 变换可以看成是 $(L^2)$ 到自身的一个一一对应的酉变换（見吉田耕作：Hilbert 空間論 § 12）。又由 (38.3) 可知，Fourier 变换把微分运算变成了乘法运算，这一点将对偏微分方程的求解起着非常重要的作用。

**2．波动方程的解**　現在来研究波动方程的定解問題．已知初始条件为：当 $t=0$ 时，$u=\psi(x)$，$u_t=\varphi(t)$ 而波动方程为

$$\partial_t^2 u-\Delta_x u=0 \quad \left(\Delta_x=\sum_{\nu=1}^m \partial_{x_\nu}^2\right). \tag{38.6}$$

要得到这一問題的解，可以先分别求方程 (38.6) 滿足下列条件

$$t=0\text{时}, \begin{cases} u_1=0, & \partial_t u_1=\varphi(x), \\ u_2=\psi(x), & \partial_t u_2=0 \end{cases}$$

的解 $u_1$，$u_2$，然后令 $u=u_1+u_2$ 即可。而求 $u_2$ 的問題可以归結为求 $u_1$ 的問題。事实上，令 $v=\int_0^t u_2(\tau, x)d\tau$，則有

$$\partial_t^2 v=\partial_t u_2, \quad \Delta_x v=\int_0^t \Delta_x u_2 d\tau=\int_0^t \partial_\tau^2 u_2 d\tau=\partial_t u_2,$$

因此有

$$\partial_{tt}^2 v - \Delta_x v = 0, \quad v(0, x) = 0, \quad v_t(0, x) = \psi(x).$$

所以只要求出当 $t=0$ 时，$v=0$，$v_t=\psi(x)$ 的解，再取 $u_2=\partial_t v$ 即可。

为了能够应用 § 29 中的迭加原理来求(38.6)的解，首先設

$$u = e^{i(\alpha\cdot x+\beta t)} \qquad (i^2=-1),$$

把它代入(38.6)后，求出 $\alpha$ 与 $\beta$ 的关系为

$$\beta = \pm |\alpha| \qquad \left(|\alpha| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu^2}\right).$$

于是

$$u = e^{i\alpha\cdot x}\cos|\alpha| t, \quad e^{i\alpha\cdot x}\sin|\alpha| t$$

都是(38.6)的解。现在設 $f(\alpha)$ 是属于$(\mathscr{S})$的任意函数，如果設

$$u = (2\pi)^{-m/2}\int f(\alpha) e^{i\alpha\cdot x}\sin|\alpha| t d^m\alpha \tag{38.7}$$

(見注意 2)，則它也是(38.6)的解。它的初始值是

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, \quad u=0, \quad u_t = (2\pi)^{-m/2}\int |\alpha| f(\alpha) e^{i\alpha\cdot x} d^m x.$$

这样，如果 $\varphi(x)$ 是属于$(\mathscr{S})$的函数，那末只要对方程

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-m/2}\int |\alpha| f(\alpha) e^{i\alpha\cdot x} d^m x \tag{38.8}$$

解出 $f(\alpha)$，就能得到所求的解。根据逆 Fourier 变换有

$$|\alpha| f(\alpha) = (2\pi)^{-m/2}\int \varphi(\xi) e^{-i\alpha\cdot\xi} d^m\xi. \tag{38.9}$$

所以根据(38.7)及(38.9)，就得到下面的公式：

$$u = (2\pi)^{-m}\int \left\{\int \varphi(\xi) e^{-i\alpha\cdot\xi} d^m\xi\right\} \frac{\sin|\alpha| t}{|\alpha|} e^{i\alpha\cdot x} d^m\alpha. \tag{38.10}$$

因为 $|\alpha|^{-1}\sin|\alpha| t$ 可对$(t, \alpha)$无限次微分，且

$$|\partial_t^\nu(|\alpha|^{-1}\sin|\alpha| t)| \leq |\alpha|^{\nu-1},$$

而(38.10)的右边，在 { } 中的积分是属于$(\mathscr{S})_\alpha$的函数，因此(38.10)对于$(t, x)$允許任意多次地进行形式微分。故(38.10)是

方程(38.6)的解。此外，根据逆变换的关系，还可以知道，这个解满足初始条件：

$$t=0\text{ 时}，\quad u=0,\quad u_t=\varphi(x).$$

**注意 2** 根据(38.9)，我們知道 $f(\alpha)$ 当 $\alpha\to 0$ 时，一般地将趋于无穷大。但是如(38.7)确实是(38.6)的解，那么 $f(\alpha)$ 必定可积，因此只要假設当 $\alpha\to 0$ 时，$f=O(|\alpha|^{-m})$，当 $\alpha\to\infty$ 时，$f=O(|\alpha|^{-m-3})$ 就够了。此外，为了使(38.10)是(38.6)的解，只要 $\varphi(x)$ 为 $m+2$ 次連續可微，并且当 $|x|\to\infty$ 时，$D^{\nu}\varphi=O(|x|^{-m-1})$ 即可(因为{ }中的积分当 $\alpha\to\infty$ 时，成为 $O(|\alpha|^{-m-2})$)。

**3. Volterra-Hadamard 关于解的表示** 如果把(38.10)中积分的顺序交换，将得到

$$u=(2\pi)^{-m}\int\varphi(\xi)\left\{\int|\alpha|^{-1}\sin|\alpha|t\cdot e^{i\alpha\cdot(x-\xi)}d^m\alpha\right\}d^m\xi.$$

但是现在{ }中的积分并不收斂，所以不允許作这样的計算。因此先定义如下的函数

$$v=(2\pi)^{-m/2}\int\psi(\alpha)\Phi_m(\alpha,t)e^{i\alpha\cdot x}d^m\alpha, \tag{38.11}$$

这里

$$\psi(\alpha)=(2\pi)^{-m/2}\int\varphi(\xi)e^{-i\alpha\cdot\xi}d^m\xi, \tag{38.12}$$

并且

$$\Phi_m(\alpha,t)=\begin{cases}(-1)^{\frac{m-1}{2}}|\alpha|^{1-m}\cos|\alpha|t & (m\text{ 为奇数}\geqslant 3),\\ (-1)^{\frac{m-2}{2}}|\alpha|^{1-m}\sin|\alpha|t & (m\text{ 偶数})。\end{cases}$$

$$\tag{38.13}$$

由于 $\partial_t^{m-2}\Phi_m=|\alpha|^{-1}\sin|\alpha|t$，所以对(38.11)作形式微分后，就有

$$\partial_t^{m-2}v=(2\pi)^{-m/2}\int\psi(\alpha)|\alpha|^{-1}\sin|\alpha|t\cdot e^{i\alpha\cdot x}d^m\alpha. \tag{38.14}$$

再根据(38.10)，(38.12)，(38.14)有

$$u=\partial_t^{m-2}v. \tag{38.15}$$

要証明公式(38.14)的正确性，只需要注意下列事实就够了：

函数 $\Phi_m$ 当 $\alpha\neq 0$ 时，对于 $(\alpha, t)$ 无限次的連續可微，且

$$|\partial_t^\nu \Phi_m| \leq |\alpha|^{1+\nu-m},$$

此外，$\psi$ 是属于 $(\mathscr{S})_\alpha$ 的函数。

再由(38.11)及(38.12)可以証明，$v$ 能表示成为下面的形状：

$$v=\int_{|\xi|\leq t} K_m(\xi, t)\varphi(x+\xi)d^n\xi.$$

为了导出这个公式，令

$$v_\rho=(2\pi)^{-n/2}\int_{|\alpha|\leq\rho}\psi(\alpha)\Phi_m(\alpha, t)e^{i\alpha\cdot x}d^n\alpha, \qquad (38.16)$$

那么容易証明

$$\lim_{\rho\to\infty} v_\rho=v.$$

由(38.12)及(38.16)(变换了积分的順序)，有

$$v_\rho=(2\pi)^{-n}\int K_{m,\rho}(\xi, t)\varphi(\xi+x)d^n\xi, \qquad (38.17)$$

这里

$$K_{m,\rho}(\xi, t)=\int_{|\alpha|\leq\rho}\Phi_m(\alpha, t)e^{-i\alpha\cdot\xi}d^n\alpha.$$

下面設 $m$ 是奇数并且 $\geq 3$。由(38.13)及(38.17)，如令 $|\alpha|=r$，$\alpha_\nu=r\beta_\nu$，則有

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}K_{m,\rho}=\int_0^\rho\left\{\int_{|\beta|=1}e^{-ir\beta\cdot\xi}d\omega(\beta)\right\}\cos rt\,dr, \qquad (38.18)$$

($d\omega(\beta)$ 是单位球面 $|\beta|=1$ 的面积元素)。等式右边 { } 中的积分，由于球面的对称性，是 $r\cdot\xi$ 的函数。于是如設

$$\beta\cdot\xi=|\xi|\sigma \quad (-1\leq\sigma\leq 1),$$

則在球面 $|\beta|=1$ 上对应于 $d\sigma$ 的无穷狭的球带面积是

$$d\omega=\omega_{m-1}(1-\sigma^2)^{(m-3)/2}d\sigma.$$

由此就有

$$\int_{|\beta|=1}e^{-ir\beta\cdot\xi}d\omega(\beta)=\omega_{m-1}\int_{-1}^1(1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}}e^{-i|\xi|r\sigma}d\sigma.$$

因为这个积分只能取实数值，所以設 $|\xi|\neq 0$，由(38.18)有

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} K_{m,\rho}=\omega_{m-1}\int_0^\rho\left\{\int_{-1}^1(1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}}e^{-i|\xi|r\sigma}d\sigma\right\}e^{irt}dr$$

$$=\frac{\omega_{m-1}}{|\xi|}\int_{-1}^1(1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}}\left\{\int_0^{|\xi|\rho}e^{-i\eta(\sigma-t/|\xi|)}d\eta\right\}d\sigma.$$

由于等式的左边是实数，所以可以只取右边{ }中的实数部分，即

$$\Re\left\{\int_0^{|\xi|\rho}e^{-i(\sigma-t/|\xi|)\eta}d\eta\right\}=\frac{\sin\rho|\xi|(\sigma-t/|\xi|)}{\sigma-t/|\xi|},$$

这样就得到了

$$K_{m,\rho}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\omega_{m-1}}{|\xi|}\int_{-1}^1(1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}}\frac{\sin\rho|\xi|(\sigma-t/|\xi|)}{\sigma-t/|\xi|}d\sigma. \tag{38.19}$$

当 $\rho\to\infty$ 时（$|\xi|\neq0$），根据熟知的 Dirichlet 积分定理（见本丛书：Fourier 变换与 Laplace 变换 § 4），就得到

$$\lim_{\rho\to\infty}K_{m,\rho}(\xi,t)=\begin{cases}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\dfrac{\pi\omega_{m-1}}{|\xi|}(1-t^2/|\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}} & (|\xi|>t\geqslant0),\\ 0 & (|\xi|<t).\end{cases}$$

当 $m\geqslant3$ 时，对 $|\sigma|\leqslant1$，可以令 $h(\sigma)=(1-\sigma^2)^{\frac{m-3}{2}}$，对 $|\sigma|>1$，可以令 $h(\sigma)=0$，由于这样的 $h(\sigma)$ 在区間 $-\infty<\sigma<\infty$ 中是有界变分函数，所以 (38.19) 右边的积分 $\int_{-1}^1$ 对于 $t,\xi,\rho$ 一致有界。又因为 $\varphi(\xi)$ 属于 $(\mathscr{S})_\xi$，所以在 (38.17) 中关于 $\rho\to\infty$ 的极限可以移在积分号下施行，于是有

$$v=(2\pi)^{-m}\int_{|\xi|>t}K_m(\xi,t)\varphi(x+\xi)d^m\xi,$$

这里

$$K_m(\xi,t)=c_m|\xi|^{-1}(1-t^2/|\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}}$$

$$=c_m|\xi|^{2-m}(|\xi|^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}$$

(而 $c_m=(-1)^{(m-1)/2}\pi\omega_{m-1}$)。因而根据(38.15)就知道，所求的解可以表示为

$$u=(2\pi)^{-m}c_m\partial_t^{m-2}\int_{|\xi|>t}|\xi|^{2-m}(|\xi|^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\varphi(x+\xi)d^m\xi. \tag{38.20}$$

当 $m$ 为奇数且 $\geq 3$ 时，$(|\xi|^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}$ 是 $t$ 的 $m-3$ 次有理整式，所以关于整个空間的积分有下面的公式：

$$(2\pi)^{-m}c_m\partial_t^{m-2}\int|\xi|^{2-m}(|\xi|^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\varphi(x+\xi)d^m\xi=0.$$

把这个公式与(38.20)分别作和与差，則积分变数的区域成为 $|\xi|<t$，于是有

$$u=(2\pi)^{-m}c_m\partial_t^{m-2}\int_{|\xi|<t}|\xi|^{2-m}(t^2-|\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}}\varphi(x+\xi)d^m\xi. \tag{38.21}$$

如果再設 $|\xi|=r$，$\xi_\nu=r\alpha_\nu$，就有

$$\int_{|\xi|<t}|\xi|^{2-m}(t^2-|\xi|^2)^{\frac{m-3}{2}}\varphi(x+\xi)d^m\xi$$
$$=\omega_m\int_0^t M_m[\varphi](x,r)r(t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}dr,$$

这里

$$M_m[\varphi](x,r)=\frac{1}{\omega_m}\int_{|\alpha|=1}\varphi(x+r\alpha)d\omega(\alpha), \tag{38.22}$$

故 $M_m[\varphi](x,r)$ 恰好就是 $\varphi$ 在以 $x$ 为中心，$r$ 为半徑的球面上的平均值。这样，就可以把(38.21)写成

$$u=C_m\partial_t^{m-2}\int_0^t M_m[\varphi](x,r)r(t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}dr. \tag{38.23}$$

为了具体算出 $C_m$ 的值，我們考虑 $\varphi(x)\equiv 1$ 的特殊情形，这时，所求的解就是 $u=t$，所以有

$$t = C_m \partial_t^{m-2} \int_0^t r(t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}} dr.$$

但是

$$\int_0^t r(t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}} dr = t^{m-1} \int_0^1 s(1-s^2)^{\frac{m-3}{2}} ds = t^{m-1}/(m-1),$$

所以 $C_m = 1/(m-2)!$. 最后就得到

$$u = \frac{1}{(m-2)!} \partial_t^{m-2} \int_0^t r(t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}} M_m[\varphi](x, r) dr. \quad (38.24)$$

特别,当 $m=3$ 时,成立着 Kirchhoff 公式

$$u = tM_3[\varphi](x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\alpha|=1} \varphi(x+t\alpha) d\omega(\alpha). \quad (38.25)$$

**4. 降維**　上面仅討論了 $m$ 是奇数并且 $\geqslant 3$ 的情形,如果 $m$ 是偶数,那么只要考虑对 $m+1$ 維空間第 $m+1$ 个变数 $x_{m+1}$ 是常数的函数,就能把它化成 $m+1$ 是奇数而 $\geqslant 3$ 的情形来求解。 即把 $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $u(t, x_1, \cdots, x_m)$ 分别看作 $(x_1, \cdots, x_{m+1})$ 及 $(t, x_1, \cdots, x_{m+1})$ 的函数,并在 (38.24) 中以 $m+1$ 代替 $m$ 就得到

$$u = \frac{1}{(m-1)!} \partial_t^{m-1} \int_0^t r(t^2-r^2)^{\frac{m-2}{2}} M_{m+1}[\varphi](x, r) dr \quad (m \geqslant 2)$$

$$= \frac{m-2}{(m-1)!} \partial_t^{m-2} \int_0^t t(t^2-r^2)^{\frac{m-4}{2}} rM_{m+1}[\varphi](x, r) dr \quad (m \geqslant 4).$$

(38.26)

如果把关于 $m+1$ 維空間球面的均值表示成为 $m$ 維空間的积分,就有

$$M_{m+1}[\varphi](x, r) = \frac{2}{\omega_m r^m} \int_{|\alpha|<r} \varphi(x+\alpha)(1-|\alpha|^2/r^2)^{-1/2} d^m\alpha$$

$$= \frac{c_m}{r^{m-1}} \int_0^r M_m[\varphi](x, \rho) \rho^{m-1} (r^2-\rho^2)^{-1/2} d\rho$$

$$(c_m = 2\omega_{m-1}/\omega_m). \quad (38.27)$$

这样,对于 $m \geqslant 4$, 就得到

$$\int_0^t t(t^2-r^2)^{\frac{m-4}{2}} r M_{m-1}[\varphi](x, r)dr$$

$$=c_m t\int_0^t M_m[\varphi](x, \rho)\rho^{m-1}\left\{\int_\rho^t \frac{(t^2-r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2}\sqrt{r^2-\rho^2}}dr\right\}d\rho.$$

为了計算等式右边的{ }，令

$$1-\rho^2/r^2=(1-\rho^2/t^2)z,$$

則有

$$(t^2-r^2)r^{-2}=(t^2-\rho^2)\rho^{-2}(1-z),$$

$$dr=\frac{1}{2}\rho^{-2}r^{-3}(1-\rho^2/t^2)dz,$$

因此

$$\int_\rho^t \frac{(t^2-r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2}\sqrt{r^2-\rho^2}}dr$$

$$=\frac{1}{2}t^{-1}(t^2-\rho^2)^{\frac{m-3}{2}}\rho^{2-m}\int_0^1(1-z)^{\frac{m-4}{2}}z^{-1/2}dz.$$

再根据(38.26)，(38.27)就得到

$$u=C_m\partial_t^{m-2}\int_0^t M_m[\varphi](x, \rho)\rho(t^2-\rho^2)^{\frac{m-3}{2}}d\rho. \quad (38.28)$$

这个公式的形状与(38.24)完全一样，所以可以用前节同样的方法計算 $C_m$，而得到 $C_m=1/(m-2)!$。当 $m=2$ 时，无論用(38.26)式或是上面的公式都能得到相同的結果，卽

$$u=\int_0^t \rho(t^2-\rho^2)^{-1/2}M_2[\varphi](x, \rho)d\rho.$$

**5. 非齐次方程的解法** 如果对一般的二阶双曲型齐次綫性方程($t$, $x$ 为独立变数)

$$L[u]=0 \quad (38.29)$$

已經得到了当 $t=\tau$($\tau$ 任意)时的初值問題的解，那么就可以用来导出非齐次方程

$$L[u]=f(t, x) \quad (38.30)$$

的解。現在假設 $\partial_{tt}^2 u$ 的系数为 1，設方程 (38.29) 当 $t=\tau$ 时滿足条件 $u=0, u_t=f(\tau, x)$ 的解是 $u=v(t, x; \tau)$，此外，$v$ 对于 $(t, x)$ 的直到二阶的导数对一切的 $(t, x; \tau)$ 都是連續的。令

$$u=\int_0^t v(t, x; \tau)d\tau, \tag{38.31}$$

由于 $v(\tau, x; \tau)=0, v_t(\tau, x; \tau)=f(\tau, x)$，所以有

$$\partial_t u=\int_0^t v_t(t, x; \tau)d\tau, \quad \partial_{tt}^2 u=f(t, x)+\int_0^t v_{tt}(t, x; \tau)d\tau.$$

由此（再因为 $L[v]=0$），就得到

$$L[u]=f(t, x)+\int_0^t L_t[v]d\tau=f(t, x).$$

由 (38.31) 还可导出

$$t=0\text{ 时}, \quad u=0, \quad u_t=0. \tag{38.32}$$

卽 (38.31) 是方程 (38.30) 满足初始条件 (38.32) 的解，特别对于 $m=3$ 的波动方程，由于滿足 $t=\tau$ 时，$u=0, u_t=f(\tau, x)$ 的解是

$$v(t, x; \tau)=(t-\tau)M_3[f]_x(x; t-\tau) \quad (t\geqslant\tau),$$

所以非齐次波动方程

$$\partial_{tt}^2 u-\Delta_x u=f(t, x)$$

滿足初始条件 (38.32) 的解可用下列公式表示：

$$u=\int_0^t (t-\tau)M_3[f]_x(x, t-\tau)d\tau=\int_0^t r M_3[f]_x(x, r)dr. \tag{38.33}$$

## §39 关于双曲型方程的补充說明

現在簡单地介紹一些本章講解得不够充分的問題。

**1. 作为解的不連續曲面的特征面**　二阶綫性方程的特征面具有一个特征，卽可以解释为解的不連續曲面。設解在曲面 $S$ 的两側，与它的一阶导数都是連續的，并且当沿着 $S$ 的两側趋近于 $S$

时，二阶导数虽一致收敛，但是在 $S$ 的两侧却有不同的极限值。这样，光滑曲面 $S$ 就非是特征面不可。此外，在适当地拓广了解的意义后，也能把沿着曲面 $S$，解自身将不連續或是它的一阶导函数将不連續，作为特征面的特征。

**2. 双曲型方程的基本解** 利用 $r(x, y)=\sqrt{\sum(x_\nu-y_\nu)^2}$，我們知道 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的基本解，当 $m=2$ 时为 $(2\pi)^{-1}\log r(x, y)$，当 $m\geqslant 3$ 时为 $((m-2)\omega_m)^{-1} r(x, y)^{2-m}$。由于 Laplace 方程的形状和波动方程的形状相象，所以令

$$r(t, x; \tau, \xi)=\begin{cases}\sqrt{(t-\tau)^2-\sum(x_\nu-\xi_\nu)^2} & (|x-\xi|<t-\tau),\\ 0 & (|x-\xi|>t-\tau)\end{cases}$$

后，函数 $C_m r(t,x;\tau,\xi)^{2-m}$ 是否起着波动方程基本解的作用呢？对于这个問題，由于在以 $(\tau, \xi)$ 为顶点的射綫錐 $(t-\tau)^2=\sum(x_\nu-\xi_\nu)^2$ 的表面上 $r=0$，所以利用 $r$ 所作的积分不收斂。Hadamard 使用了一种所謂取发散积分的有限部分的技巧，把当 $m$ 等于奇数时問題解决了(当 $m$ 等于偶数时，可以使用降維法)。

对于一般的双曲型方程(36.26)，令 $(a_{ij})^{-1}=(A_{ij})$，并令

$$\delta=\int\sqrt{dt^2-\sum A_{ij}dx_i dx_j}$$

为曲綫的弧长，这时，設沿着測地綫的距离为 $r(tx; \tau, \xi)$，利用这个函数就能够导出拟基本解。参看 Courant-Hilbert II, p. 430 或 Hadamard: Le problème de Cauchy.

M. Riesz 根据推广到高維空間的 Riemann-Liouville 积分，得到了对任意高阶方程統一的求基本解的方法，这可参看 L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., 81 (1954)。不过这种情形的基本解并不是在普通意义的函数，而是在广义函数的意义下得到的。

**3. Asgeirsson 定理** 关于常系数超双曲型(也可以是正規

双曲型)的齐次方程的解法，可以归結为解 $2m$ 个独立变数 $(x, y) = (x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m)$ 的下列方程

$$\Delta_x u - \Delta_y u = 0.$$

对于这种方程，L. Asgeirsson 发見了(1932年)一个巧妙的均値定理：

$$\frac{1}{\omega_m}\int_{|\alpha|=1} u(x+r\alpha; y)\, d\omega(\alpha) = \frac{1}{\omega_m}\int_{|\alpha|=1} u(x; y+r\alpha)\, d\omega(\alpha).$$

根据这个公式，使用降維法，就能导出波动方程的解。詳見 Courant-Hilbert II, p. 417.

**4. 对称的双曲型联立一阶方程組**　三維空間的 Maxwell 方程($u$, $v$ 为向量)为

$$\partial_t u = -\frac{1}{c}\operatorname{rot} v, \qquad \partial_t v = \frac{1}{c}\operatorname{rot} u,$$

如果令 $u + iv = w$ $(i^2 = -1)$，那么可以把它看作是下列对称的联立一阶方程組

$$\partial_t w_\varkappa = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda\mu}(t, x)\partial_\mu w_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{k} b_{\varkappa\lambda}(t, x) w_\lambda + f_\varkappa(t, x)$$

$$a_{\varkappa\lambda\mu} = \overline{a}_{\lambda\varkappa\mu} \quad (\text{共軛数})$$

的特殊情形。二阶双曲型方程也能归結为这种形状。对于这种方程組，Friedrichs 与 Lax 以有关能量积分的不等式作为基础，使用 Hilbert 空間的方法来研究方程的广义解，并且导出了 Cauchy 問題的解的存在定理。詳見南云道夫著：近代偏微分方程式論(共立社)第4章。

**5. 单参数-半群法**　吉田耕作最近指出，在抛物型方程中使用成功的单参数-半群法理論(Hille-Yosida 理論)中的"算子的指数函数"，可以适当地应用于二阶双曲型方程，并对 Cauchy 問題給出了值得注意的解法。詳見"数学"第8卷2号(日本数学会)。

**6. 高阶的双曲型方程**　对于一般的高阶联立綫性方程組的

情形，Petrovski 曾給出了双曲型方程的定义，并且証明了 Cauchy 問題解的存在定理 (Mate. Sbornik, 2(44), 1937, p. 814～848)。后来 J. Leray 指出了 Petrovski 証明中的缺点。集一般綫性双曲型方程 Cauchy 問題理論的大成于 Hyperbolic differential equations (Princeton, 1952) 一书。在导出一些作为一般高阶偏微分理論基础的积分不等式的过程中，Fourier 积分起着基本的作用。

不論 Petrovski 或是 Leray 的理論，都使用了关于解析正則方程的 Cauchy-Kowalewski 定理。最近白田平引入了 Lax 所考虑的方法，用完全泛函分析的方式建立了包括抛物型方程的統一的理論，見 Osaka Math. Jour., 9(1957), p. 43～59.

# 后　　記

偏微分方程是一門内容丰富的学科，但本书只能介紹到此为止，虽然作者已竭尽全力之所及，这里总不免带有一定的片面性。由于作者水平所限，在叙述上可能只注意于一些细节而不能照顾到全局，使全书的綱領不够鮮明。在内容安排上，由于篇幅的限制，对于全微分方程和切触变换未曾触及，而对于高阶方程、抛物型方程等也几乎全部割爱。最近由于泛函分析的发展（在日本，这方面以小平邦彦为先驅，吉田耕作、加藤敏夫、溝畑茂、白田平、伊藤清等人均有进一步的研究），已使偏微分方程的理論为之一新，我們在本书中未能收集这方面的内容，感到非常遺憾。好在本丛书中有吉田耕作的“泛函分析”，以相当篇幅介紹了新的偏微分方程理論，有岩村联的“广义函数論”，詳細闡述了近代偏微分方程理論中必需的内容，还有犬井鉄郎等的“偏微分方程的应用”，以及其他有关书籍等，都可以弥补本书之不足。最后，謹对弥永昌吉和吉田耕作表示深切的謝意。

# 参 考 书


1) BERNSTEIN: Existence theorems in partial differential equations (Ann. of Math. Study), (1950)

2) BERS, BOCHNER and JOHN: Contributions to the theory of partial differential equations (Ann. of Math. Study), (1954).

3) CARATHÉODORY: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, (1935).

4) COURANT und HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, I, II, (1931), (1937).

5) DUFF: Partial differential equations, (1955).

6) GOURSAT: Lecons sur l'intégrations des equations aux dérivées partielles du premier ordre, (1921).

7) HADAMARD: Le problème de Cauchy et les equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, (1932).

8) 福原満洲雄: 微分方程式, 上, 下, (朝倉).

9) 井上正雄: ポテンシャル論, (共立全書).

10) 犬井鉄郎: 応用偏微分方程式論, (岩波).

11) JOHN: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, (1955).

12) LERAY: Hyperbolic differential equations (Lecture notes at the Inst. for Adv. Study), (1952)

13) MIRANDA: Equazioni alle derivate parzialli di tipo ellittico (Ergeb. der Math.), (1955).

14) PETROVSKI: Lectures on partial differential equations, (1954).

15) PICARD: Lecons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, (1927).

16) PICARD: Lecons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, (1930)

17) SAUER: Anfangswertproblem bei partiellen Differentialgleichungen, (1952).

18) SCHWARTZ: Theorie des distributions, I, II, (1950). 〔岩村聯訳: 超函数論, (岩波)〕.

19) 吉田耕作: 微分方程式の解法, (岩波全書).

20) 吉江琢児: 初等一階偏微分方程式, (裳華房).

# 校 后 記

**林 坚 冰**

对有兴趣于偏微分方程的同志来說，这是一本值得推荐的参考书。作者在短短的二百頁內，以精炼的形式概括地介紹了偏微分方程古典理論中的主要結果，并且在这个基础上引进了一些和近代理論有关的基本概念。

偏微分方程論是一門古典数学，內容丰富深刻，而且联系到各个方面，要在一本小册子里作較有系統的介紹，除了在叙述形式上需要讲究外，对内容沒有大刀闊斧的取舍也是不行的。因此，正如作者自己所說的，在这里完全删掉有关抛物型方程，高于二阶的方程以及全微分方程等等的部分。尽管如此，念过这本书后，讀者至少对偏微分方程的古典結果会有个概括的了解。在形式方面，作者也采用了最省篇幅的向量写法和一些特殊的記号，叙述条理分明，論証也比較严密。只要具有数学分析基础知識的同志基本上都能看得懂。但是由于作者过多地追求形式的演算，而談問題又尽量从一般情况出发，因而对沒有学过大学"数学物理方程"这門課的讀者来說，有些結果和論証的实质精神就不大容易理解❶。书中有的章节的后面还附有习題，并不頂难。通过练习可以对正文有更深入的理解

看完这本书后，如果讀者希望沿着作者的思路要进一步了解

---

❶ 最近出版一本高等学校交流讲义"数学物理方程"（兰州大学，北京大学等編著。高等教育出版社（1961））。沒有学过这門課的同志在閱讀本书的过程时可結合起来念。

偏微分方程的近代理論，則可以参看原作者所著的《近代偏微分方程論》(近代数学丛书 4-B，共立社)。我国自編的有关偏微分方程的参考书并不多，值得介紹的有吳新謀編著的[1]和复旦大学編写的教材[2]。吳本的特点是材料丰富，习題多；特别是第三册，大部分介紹近代成果，其中末一章对泛函分析在数理方程上的应用有較詳尽的介紹，可补本书的不足。复旦大学一书是在教学改革后編的，对各种古典方法处理的观点較高，富有启发性。念过本书后再浏覽一下那本书，相信对本书所提到的各种解法的特点和作用会有进一步的认識。

下面談談校讀这本书的体会。看来，作者在闡述問題、方法和概念方面力求抓住关鍵，不因小失大。譬如，問題談得很集中：把两自变数的二阶方程和一阶方程組归在一起，着重討論半綫性方程的分类以及双曲型方程的 Cauchy 問題，而对于特征問題、混杂問題干脆不提；对一阶非綫性方程也着重談 Cauchy 問題。在方法的选擇上，作者也有所側重：对于适用半綫性方程的逐次逼近法就在 § 19 和 § 22 中仔細加以討論；由于篇幅限制，对势函数法只作简要的介紹；而上下函数法、分离变数法等等就精簡不談。各章节都很注意新概念的引进，而第五章可以說是主要在介紹象特征面，强、弱解，平面波这些概念。总之，作者对于問題非典型的不讲，方法讲不透不讲，概念不是基本的也不讲，其結果就显得前后呼应，重点突出。

其次，作者在問題和解法的配合方面也下过功夫。例如迭合原理是放在 § 29 常系数方程平面波的解中来讲；对于两自变数調和方程則直接用复函数理論来論述；栅函数方法是在証明非自伴方程 Dirichlet 問題解的唯一性定理时順便提出；Fourier 变换則在波动方程的 Cauchy 問題的解法中加以介紹。这样安排的結果，問題讲够了，方法也差不多都作了交代。此外，作者把

Hadamard 反例和解的存在、唯一性以及适定性問題放在 § 22 中討論关于双曲半綫性一阶方程組决定区域的时候提出来，然后在 § 37 談到波动方程 Cauchy 問題时，又抓住机会举例說明在不同度量下理解連續依从这概念的重要性。从这些例子都可以看出作者的匠心。总的說来，后三章写得比前面更好些。特别在第 6, 7 两章的末节也和[6]一样附有作者自认为主要的問題及有关的文献，对准备进一步专題研究的讀者来說值得参考。

本书不足的地方，主观上认为有如下几点：

首先形式演算居多，只求数学結論的完善，而对于这些結論所反映的物理現象的本质則极少談到。除了在 § 16 举出中心力場运动方程等个别的例子以外，在其余各章节以及习題中就看不到数学和物理力学的联系。实际上，象广义解引进的必要性，适定性問題的重要性等等都可以从物理現象加以說明。此外，决定区域、能量积分反映出波傳播速度的有限性；特征面上解間断的力学意义等等也应当予以注意。虽然这样会占用一些篇幅（也不多！），但作为应用丛书来說，这些都是不可缺少的部分。

其次，作者所沒有談到的有些問題和方法无論从实用上或者从理論上来說都是不能省略的。例如，Laplace 双曲型方程的 Riemann 方法和特征問題；波动方程的混杂問題和分离变数法等等。关于这些都应当有独立的章节加以討論。此外，象混合型方程的标准化問題以及某些有力的直接方法，也尽可以安排在有关的部分作簡单的介紹。

最后，在各章节附注中，作者談到日本和西方数学家工作較多而对苏联学派的工作除了提到 Берштейн. Петровский 和 Олейник 等的个别工作外，其他象 Петровский 的窩隙理論，Смирнов 的函数不变解方法，Соболев 学派的工作等等就沒有作簡要的介紹。好在这一点对于長期学习苏联的我們来說，影响并不頂大。

下面介紹本书各章主要內容，并且补充一些必要的基础知識和值得参考的著作。由于学識有限，主观片面在所难免。

第 1 章主要是介紹 Cauchy-Ковалевская 定理以及特征曲面的定义，証明定理的强級数方法只作介紹，特征曲面也只是对半綫性一阶方程組和高阶方程加以定义。对一般情况的 Cauchy-Ковалевская 定理詳細的論証可参考[16]第 8 章和 [6] § 2。关于特征曲面一般的定义可参考[6] § 3。

第 2 章主要是介紹一阶拟綫性方程 Cauchy 問題的特征解法，在 § 8 中所提到的关于主部相等的拟綫性方程組的結果不过是前面几节的推广。实际上应当注意的是有关于完全方程組的理論，因为它不但表明偏微分方程組和常微分方程組或代数方程組本质上不同的地方，而且对于寻求完全积分也是有用的。关于这方面的知識可参考[5]第 118～119 段或者[18] § 27。

第 3 章主要是介紹一阶非綫性方程 Cauchy 問題的特征綫法和完全积分解法。在 § 16 还附带談到 Hamilton-Jacobi 方程及其特例。关于常碰到的 Poisson-Jacobi 括号以及完全积分的求法可参考[5]第 117～122 段和 [18] § 2.8。至于 Hamilton-Jacobi 原理及其应用，[18] § 2.5～§ 2.6 也可以作为补充。

第 4 章論述有关两个自变数的半綫性二阶偏微分方程的主要結果。在 § 18 作者談到方程的分类和标准化問題。这里关于混合型方程标准化的 Cibrario 定理应当提起注意。关于这方面的問題可参考[14]，[15]。如果对混合型方程理論有兴趣的話，讀者还可以参看[11]，[15]。在 § 19 談到半綫性双曲型方程 Cauchy 問題的解法时，作者只詳細介紹逐次逼近法，而对于重要的 Riemann 方法則沒有介紹。关于这方法，与它有关的特征問題以及在解 Euler-Poisson 方程上的应用可参看 [1] 第五章或[18] § 3.4，§ 3.7。§ 20 談到用复函数論方法来解关于圓域的 Dirichlet

問題。这里要补充的斜微商和其他边值問題可参看[13]第三章55段。至于对一般区域的 Dirichlet 問題的上下函数法和势位論方法則可参考[6] § 31 和 § 34。

第 5 章着重介紹一般二阶綫性方程論中某些常用的概念。例如，特征面、特征射綫、余法綫、平面波、广义解等等。在介紹广义解时作者只是对强、弱解下了定义，至于广义解引进的必要性和定义的多样性就无法作全面的交代。对于广义解最直观的解釋可参考[12]第六章 § 6。在[3]第22讲中和[6] § 9 都提到引进广义解的必要性，也可以作为补充。如果要了解关于这方面 Соболев 学派的工作請参看专著[8]。对特征面和方程的分类，作者也仅仅作了形式上的定义。如果讀者对于特征面和强弱間断解的关系以及它們的力学意义需要了解的話，可参看[5]第 141～142, 161～163 段。关于二阶偏微分方程怎样表現出各种不同物理現象的規律，参考书[4]有比較全面的介紹。讀者如果对于半群理論在微分方程上的应用感到兴趣，則可参看[17]第 20 章。

第 6 章着重介紹綫性椭圓型方程的一些基本結果和解法大意。在 § 31 作者闡述关于自伴椭圓型方程的 Dirichlet 原理。在 § 32 則詳細討論了 Poisson 方程的 Dirichlet 問題。但是往后两节只是泛泛地介紹一般椭圓型方程的基本解和 Green 函数，对于問題的解决还差得远。关于变分原理及其解法可参考[7]第二、三章，在那里讲得比較透彻。关于势位論方法[1]第十章前几节有詳細的讲解。这两部分都可以弥补本书的不足。至于追記中所提到的 Schauder 估計法在[19]第 5 章有詳尽的介紹。这一本专著还总結了近代有关椭圓型方程的主要工作，值得参考。此外，我們认为，在高阶方程方面 Соболев 多重調和方程的工作[8]应当提起注意。

第 7 章着重介紹綫性正規双曲型方程 Cauchy 問題的两个古

典的結果：一是能量积分不等式和唯一性定理；一是波动方程 Cauchy 問題的解的表达式。这里要用到 Fourier 变换的理論，关于这方面的参考书很多，我們只推荐篇幅較小而且着重談积分变换在数学物理中的应用的两本参考书[9]，[10]。其他如 Asgeirsson 公式、双曲方程的基本解，作者只是在末一节追記中提到。关于 Asgeirsson 公式可参考[1]第五章。至于一般綫性正規双曲型方程的 Hadamard 和 Соболев 解法可参看[1]第九章。双曲型方程的另一个基本問題是混杂問題，这里并沒提到。关于这方面的历史介紹及其解法可参看专著[20]。

## 参 考 书

[1] 吳新謀：数学物理方程第一、二、三册，科学出版社，1959.

[2] 复旦大学数学系：数学物理方程，上海科学技术出版社，1960.

[3] С. Л. Соболев: 数学物理方程，1954，錢敏等譯，高等教育出版社。

[4] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский: 数学物理方程，1953，黄克欧等譯，高等教育出版社。

[5] В. И. Смирнов: 高等数学教程，1953，四卷二分册，谷超豪、金福临譯，高等教育出版社。

[6] И. Г. Петровский: 偏微分方程讲义，1953，段虞荣譯，高等教育出版社。

[7] С. Г. Михлин: 数学物理中的直接方法，1950，周先意譯，高等教育出版社。

[8] С. Л. Соболев: 泛函分析在数学物理中的应用，1950，王柔怀等譯，科学出版社。

[9] C. J. Tranter: 数学物理中的积分变换，潘德惠譯，高等教育出版社，1959.

[10] М. И. Конторович: 运算微积分学和电路中不稳定現象，1953，胡汝鼎、謝汝宪譯，上海科学技术出版社。

[11] F. Tricomi: 論二阶混合型綫性偏微分方程，邱佩璋、王光寅譯，科学出版社，1957.

[12] А. Д. Александров 等：数学——它的内容、方法和意义，第二卷，秦元勋等譯，科学技术出版社，1959.

[13] М. А. Лаврентьев и Б. А. Шабат：复变函数论方法，施祥林、夏定中譯，高等教育出版社，1956.

[14] А. В. Бицадзе：綫性微分方程中的某些綫性問題，数学进展，4 卷 5 期，1958.

[15] А. В. Бицадзе: Уравнения смешанного типа (итоги науки), изд. А. Н. СССР, 1959.

[16] R. Courant and D. Hilbert: Методы математической физики, Том II. Гостеиздат, 1945.

[17] E. Hille: Functional analysis and semigroup, 1948.

[18] F. Tricomi: Лекции по уравнениям в частных производных, изд. ил, 1957.

[19] K. Miranda: Уравнения с частными производными эллиптического типа, изд. ил, 1957.

[20] О. А. Ладыженская: Смешанная задача для гиперполического уравнения, тостеиздат, 1953.